Leitfaden

der

elementaren Mathematik

für

Gymnasien,

höhere Bürger- und Gewerbeschulen.

In drei Abtheilungen.

Einfach und leicht faßlich dargestellt

von

David Giffhorn,

Lehrer der Mathematik am Obergymnasium zu Braunschweig.

Zweite Abtheilung.

Leitfaden der ebenen Geometrie und Trigonometrie.

Braunschweig,

Verlag der Schulbuchhandlung.

1862.

Leitfaden

der

ebenen Geometrie und Trigonometrie

für

Gymnasien,

höhere Bürger- und Gewerbeschulen

einfach und leicht faßlich dargestellt

von

David Giffhorn,

Lehrer der Mathematik am Obergymnasium zu Braunschweig.

Mit 155 in den Text eingedruckten Figuren.

Braunschweig,

Verlag der Schulbuchhandlung.

1862.

34

Druck von L. Döll (früher F. Scheel) in Kassel.

Geometrie.

Vorwort.

Ueber Inhalt, Form und Gebrauch des Leitfadens mögen folgende Bemerkungen als Vorwort dienen.

Der Leitfaden wird das ganze Gebiet der elementaren Mathematik umfassen, aus drei Abtheilungen bestehen:

I. Abtheilung: Arithmetik und Algebra,

II. Abtheilung: Geometrie und ebene Trigonometrie,

III. Abtheilung: Stereometrie und sphärische Trigonometrie,

und in drei mäßigen Bänden erscheinen, von denen der erste im vorigen Jahre erschienen ist, der zweite vorliegt und der dritte noch in diesem Jahre ausgegeben wird. Alle drei Abtheilungen sind nach denselben Voraussetzungen und Zielen gearbeitet.

Der Leitfaden der Geometrie und ebenen Trigonometrie bringt Alles, was in der Praxis gebraucht wird und was für das weitere Studium nothwendig und ausreichend ist. Er will Nichts geben, was nicht im Folgenden verwendet wird und im Vorhergehenden begründet ist.

Der Leitfaden ist für Lehrer und Schüler als Grundlage und Wegweiser des Unterrichts und der Repetition bestimmt, und wird auch für das Selbststudium nicht durch zu große Kürze unverständlich werden. Die Anordnung des Stoffes läßt alles Zusammengehörige ungetrennt aufeinander folgen. Die Darstellung und Beweisführung wird gegen das Ende hin knapper und will überhaupt späterhin mehr andeutend und leitend als bis ins Einzelne ausführend sein. Indirecte Beweise sind möglichst vermieden und bei dem Falle der Incommensurabilität durch die Einführung der Hilfsconstruction der unendlich kleinen Linie auf directe Beweise reducirt. Ueberall ist der Verfasser bemüht gewesen, auf den Zusammenhang der Lehren hinzuweisen, die verschiedenen Beweismethoden zu characterisiren und die Anwendung der wichtigsten Sätze zu zeigen.

In der Trigonometrie ist namentlich die Verwendung der trigonometrischen Functionen zur Logarithmirung unlogarithmischer Ausdrücke ausführlich erörtert und mit ihrer Hilfe die Lösung der quadratischen und kubischen Gleichungen, die in den meisten Lehrbüchern der Trigonometrie fehlt, ausführlich durchgeführt. Die wichtigsten Anwendungen der Trigonometrie auf geodätische Aufgaben sind im dritten Abschnitte enthalten und der Anhang gibt durch Erörterung und Erklärung verwickelter Aufgaben Anleitung zur selbstständigen Lösung von ähnlichen Aufgaben.

Wenn diese Abtheilung eine günstige Aufnahme findet, so soll ihr ein Anhang über Eintheilung und Gliederung der geometrischen Wissenschaften, elementare Beweismethoden, sowie über algebraische und geometrische Analysis folgen, der den Uebergang zur analytischen Geometrie zu vermitteln bestrebt sein wird.

Inhalt.

Geometrie.

Einleitung.

Begriff und Eintheilung der Geometrie.

§. 1.

Physischer Körper und seine Eigenschaften.

Alle Gegenstände der äußern Anschauung nennen wir Dinge oder mit einem mehr wissenschaftlichen Ausdrucke Körper. Was wir an ihnen wahrnehmen, bildet ihre Beschaffenheit, ihr Wesen und ihre Eigenschaften. Die Eigenschaften erscheinen nicht selbstständig an und für sich, sondern nur an den Körpern; doch können wir sie uns selbstständig vorstellen, ohne an die Körper zu denken, an denen sie sich finden.

§. 2.

Ausdehnung, Größe und Gestalt; geometrischer Körper.

Ausdehnung und zwar endliche Ausdehnung oder Größe und endliche bestimmt begrenzte Ausdehnung oder Gestalt findet sich an jedem Körper ohne Ausnahme. Betrachten wir diese Eigenschaften an den Körpern an und für sich, ohne an die andern Eigenschaften derselben zu denken, so betrachten wir an den Körpern nur ihren Raum oder geometrischen Körper, d. h. das, was Gegenstand der Geometrie ist.

§. 3.

Verhältnisse des geometrischen Körpers zum Körper und zum unendlichen Raume.

Der geometrische Körper oder die Eigenschaft der Ausdehnung an Körpern an und für sich gedacht, existirt darum selbstständig nur in unserm Vorstellungsvermögen, außer uns nur an den Körpern als Eigenschaft neben andern Eigenschaften. Denken wir uns die Grenzen des geometrischen Körpers aufgehoben, nicht blos in der Phantasie fortgeschoben, so gelangen wir zum Begriff des unendlichen Raumes.

§. 4.

Eigenschaften des geometrischen Körpers und des unendlichen Raumes.

Der geometrische Körper, so wie der unendliche Raum hat folgende unmittelbar an ihm hervortretende Eigenschaften:

a. Stetigkeit, d. h. eine solche Lage seiner Theile, daß Anfang und Ende der einzelnen Theile ohne endlichen Zwischenraum neben einander liegen.

b. Unendliche Theilbarkeit, die mit der Stetigkeit nothwendig verbunden ist.

c. Unendlich allseitige Richtung mit den inneren Gegensätzen nach links und rechts, nach vorwärts und rückwärts, nach oben und unten.

d. Dreistreckigkeit oder drei Ausdehnungen in Länge, Breite und Höhe.

Bemerkung. 1. Die Eigenschaften sind keiner Erklärung fähig, da sie auf keine noch allgemeinere Eigenschaften zurückgeführt werden können; der Lehrer hat Erläuterungen zu geben, um zu verhüten, daß falsche Vorstellungen damit verbunden werden. 2. Die Dreistreckigkeit des Raumes läßt sich am leichtesten so nachweisen: Man begrenze ihn im Innern durch die Fläche, diese wiederum durch die Linie und diese endlich durch den Punkt. Da nun der Punkt ohne Ausdehnung ist und jede vorhergehende innere Grenze eine Ausdehnung mehr hat, so hat der Raum selbst drei Ausdehnungen.

§. 5.

Begrenzung des geometrischen Körpers.

Die Grenzen des geometrischen Körpers heißen Flächen, die Grenzen der Flächen Linien und endlich die Grenzen der Linien Punkte. Die Flächen haben zwei (Länge und Breite), die Linie eine (Länge) und der Punkt gar keine Ausdehnung. Die Grenzen des geometrischen Körpers finden sich immer an oder in geometrischen Körpern und sind nie selbstständig vorhanden, können aber von uns eben so gut selbstständig gedacht werden, wie der geometrische Körper. Für den Feldmesser existiren nur Linien und Flächen, aber keine Körper unter ihnen.

§. 6.

Geometrische Gebilde und ihre Gesetzmäßigkeit.

Den geometrischen Körper, seine Theile und Grenzen nennen wir mit einem allgemeinen Ausdrucke geometrische Gebilde oder geometrische Constructionen und setzen bei ihnen ebenso wie bei den Naturgebilden stillschweigend voraus, daß sie nach einem bestimmten Gesetze gebildet sind. Gesetzlos gebildete Constructionen können gar nicht Gegenstand irgend einer Untersuchung sein.

§. 7.

Erzeugung der geometrischen Gebilde durch Bewegung.

Alle geometrischen Gebilde lassen sich durch Bewegung eines einfacheren Gebildes erzeugen, Körper z. B. durch die Bewegung einer Fläche, Flächen durch die Bewegung einer Linie und Linien durch die Bewegung eines Punktes. Bei Körpern kann die Entstehung oft auf eine sehr verschiedene Weise gedacht werden. So kann ein senkrechter Cylinder entweder durch Bewegung der Grundfläche (des Kreises) oder durch Bewegung der Durchschnittsfläche (des Rechtecks) entstanden sein.

§. 8.

Bewegung des Punktes, der Linie u. s. w. und der dadurch erzeugten geometrischen Gebilde.

Ein Punkt beschreibt eine Linie, eine Linie entweder eine größere Linie oder eine Fläche, und eine Fläche entweder eine größere Fläche oder einen Körper. Ein Punkt beschreibt eine gerade Linie, wenn er sich immer in derselben Richtung bewegt, eine krumme Linie, wenn er stetig seine Richtung ändert. Eine gerade Linie beschreibt eine größere gerade Linie, wenn sie sich in ihrer eigenen Richtung fortbewegt, eine Fläche, wenn sie sich in irgend einer andern Richtung bewegt, und zwar eine ebene Fläche oder Ebene, wenn sie sich auf einer andern geraden Linie parallel mit ihrer ursprünglichen Richtung fortbewegt. Eine Ebene beschreibt eine größere Ebene, wenn sie in ihrer Richtung weiter geführt wird, und in jeder andern Richtung einen Körper.

Bemerkung. Die im Paragraph erwähnten Bewegungen und Constructionen sind durch Zeichnungen an der Tafel, durch Bewegungen von Körpern oder durch Bewegungen der Hände auf verschiedene Weise zu versinnlichen.

§. 9.

Erklärung der Geometrie.

Die Geometrie ist die Lehre von den nach einem bestimmten Gesetze erzeugten geometrischen Gebilden (Constructionen).

Bemerkung. Obgleich das Wort Geometrie seiner Ableitung nach nur den Theil der Wissenschaft bezeichnet, der seinen Ursprung der Befriedigung eines äußeren Bedürfnisses, der Grenzregulirung, Landvermessung und Landtheilung verdankt, der schon von Plato dem rein speculativen Theile gegenübergestellt und seit Aristoteles Geodäsie genannt wurde, so wird dennoch die althergebrachte Benennung der Wissenschaft mit Recht beibehalten, da die anderen dafür in Vorschlag gebrachten Namen ebensowenig den ganzen Inhalt in einem Ausdrucke bezeichnen, wie z. B. Raumgrößenlehre, Raumformlehre.

§. 10.

Eintheilung der Geometrie.

Der seit mehr als 2000 Jahren besonders durch Griechen, Inder, Araber, Italiener, Deutsche, Franzosen und Engländer gewonnene geometrische Stoff wird nach 3 Eintheilungsgründen zerlegt und geordnet:

a. nach der Lage der Constructionen,
b. nach der Beschaffenheit derselben,
c. nach den Hülfsmitteln ihrer wissenschaftlichen Betrachtung.

§. 11.

Planimetrie — Stereometrie.

Die Verschiedenheit der Lage sondert den geometrischen Stoff in

a. die Lehre von den Constructionen in einer Ebene (Planimetrie, Geometrie der Ebene),
b. die Lehre von den Constructionen in mehreren Ebenen oder im Raume (Stereometrie, Geometrie des Raumes).

§. 12.

Niedere — höhere Geometrie.

Die Beschaffenheit der Constructionen scheidet die Geometrie in

a. die Lehre von den geradlinigen und Kreis-Constructionen,
b. die Lehre von den übrigen krummlinigen Constructionen.

Bemerkung. Von der niedern Geometrie hat man seit Euklids Zeiten einen Theil unter dem Namen der Elemente oder der elementaren Geometrie abgesondert und in ihr besonders die Sätze aus der niedern Geometrie zusammengestellt, die für den weitern Aufbau der Wissenschaft unumgänglich nothwendig sind und die in der Praxis die meiste Anwendung finden.

§. 13.

Synthetische und rechnende Geometrie.

Die Geometrie bedient sich zur Herstellung und Untersuchung ihrer Constructionen zweier Hülfsmittel, der Zeichnung und Rechnung, und nach ihnen zerfällt der geometrische Stoff in

a. zeichnende Geometrie (Geometrie schlechtweg, synthetische Geometrie),
b. rechnende Geometrie (ohne allgemein gebräuchlichen Namen) Trigonometrie und analytische Geometrie.

§. 14.

Erklärung der elementaren ebenen Geometrie.

Die elementare ebene Geometrie ist demnach die Lehre von den nach einem bestimmten Gesetze in der Ebene gebildeten geradlinigen und Kreis-Constructionen, die für das weitere Studium unumgänglich nöthig sind und in der Praxis die meiste Verwendung finden.

Erster Abschnitt.

Von den beiden Grundconstructionen, der Linie und dem Winkel.

§. 1.

Die Ebene als bekannt und gegeben vorausgesetzt.

Die ebene Geometrie setzt nicht nur bei allen ihren Constructionen stillschweigend voraus, daß sie in einer Ebene liegen, sondern sie setzt diese Ebene selbst als gegeben voraus, ohne ihre Entstehung und die für sie vorausgesetzten Bedingungen weiter zu untersuchen.

§. 2.

Der Punkt.

Der Punkt ist die einfachste Construction der ebenen Geometrie, mit der jede andere Construction beginnen muß. Einen Punkt sich an jeder beliebigen Stelle des Raumes zu denken, ist ihre Grundforderung. Der Punkt hat keine Ausdehnung und daher auch keine Größe. Punkte können sich demnach nur durch ihre Stelle im Raume und durch ihre Entfernung von einander unterscheiden. Ein gezeichneter Punkt ist kein geometrischer Punkt, sondern ein Körper, also nur ein sehr ungetreues Abbild des geometrischen Punktes. Punkte werden durch Buchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnet.

A. Von der Linie.

§. 3.

Eintheilung der Linien.

Wenn sich ein Punkt immer in einer und derselben Richtung bewegt, so beschreibt er eine gerade Linie, bewegt er sich dagegen in stetig geänderter Richtung, so entsteht eine krumme Linie. Bewegt sich der Punkt nur bis zum unmittelbar benachbarten Punkte, so entsteht eine unendlich kleine oder die absolut kleinste Linie oder die Linie, in der Anfangs- und Endpunkt stetig aneinanderliegen, aus der jede endliche Linie sich gebildet hat und die in jeder endlichen Linie als ideale Einheit (Element) enthalten ist. Linien, die aus verschiedenen geraden und krummen Linien zusammengesetzt sind, heißen gebrochene Linien. Es gibt nur eine gerade Linie, aber unzählige Arten krummer Linien, von denen die niedere Geometrie nur den Kreis betrachtet.

Bemerkung. 1. Erläuterung über Entstehung der Parabel, Ellipse, Cycloide, Kettenlinie u. s. w. 2. Wenn in Zukunft von Linien schlechtweg die Rede ist, so sollen darunter immer gerade Linien verstanden werden. 3. Die unendlich kleine Linie, die in Zukunft mit (λ) bezeichnet werden soll, ist für den Mathematiker dasselbe, was für den Chemiker das Atom ist, eine Hülfsgröße, die in der Wirklichkeit nicht anzutreffen ist, auf die aber der Begriff der Stetigkeit mit Nothwendigkeit führt und die ebenso leicht zu denken ist, wie der Punkt und der unendliche Raum, wenn diese Begriffe auch nicht mit Händen zu greifen, mit Augen zu sehen und mit der Phantasie zu erfassen und zu umspannen sind. Das unendlich Kleine sucht die disparaten Begriffe des Stetigen und Discreten, des Körperlichen und Geistigen, der Auffassung durch Phantasie und Verstand zu vermitteln. Es leistet dem Mathematiker in der Beweisführung die wichtigsten Dienste, indem es ihn von dem Falle der Incommensurabilität, indirecten Beweisen und der weitschichtigen Exhaustionsmethode befreit, die den Begriff des unendlich Kleinen nicht vermeidet, sondern nur weiter in den Hintergrund schiebt. —

§. 4.

Gerade Linie und Vergleichung derselben mit jeder andern Linie zwischen denselben Punkten.

Durch einen Punkt lassen sich unendlich viele Linien ziehen. Durch zwei Punkte ist die Richtung der geraden Linie vollkommen bestimmt und wenn es ihre Endpunkte sind, auch ihre Länge oder Größe. Durch zwei Punkte ist demnach nur eine gerade Linie möglich, aber unzählig viele gebrochene oder krumme Linien. Sind zwischen zwei Punkten mehrere gerade Linien gezogen, so fallen sie in einander oder decken sich. Die gerade Linie ist zugleich die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten und heißt darum auch die Entfernung derselben (Entfernung der Erde von der Sonne).

§. 5.

Strahl und Strecke.

Linien, die von einem Punkte mit verschiedener Richtung auslaufen, heißen Strahlen und jener Punkt ihr Strahlenpunkt; begrenzte Linien heißen auch Strecken und werden durch zwei an ihre Endpunkte gesetzte Buchstaben bezeichnet.

§. 6.

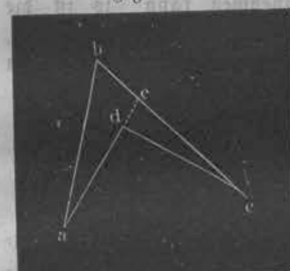
Gleichheits- und Ungleichheitszeichen.

Daß zwei Größen A und B gleich sind, wird durch $A = B$ bezeichnet,
daß A größer ist als B durch $A > B$,
daß A kleiner ist als B durch $A < B$,
daß A ungleich B ist durch $A \gtrless B$,
daß endlich A entweder gleich oder ungleich B gedacht werden soll, wird durch $A \gtreqless B$ angedeutet.

§ 7.

Von zwei einmal gebrochenen Linien zwischen denselben Endpunkten ist die einschließende oder äußere immer größer, als die eingeschlossene oder innere.

Fig. 1.



In Figur 1 ist $ab + bc > ad + dc$, denn verlängert man ad nach e, so ist $dc < de + ec$ (§. 4) und $ad + de < ab + be$.
Daher $ad + de + dc < de + ec + ab + be$, zieht man nun auf beiden Seiten de ab, so ist

$$ad + dc < ab + be + ec$$
$$\text{oder } ad + dc < ab + bc.$$

§. 8.

Gleichheit und Ungleichheit der Linien.

Zwei Linien sind entweder einander gleich oder ungleich; sind sie ungleich, so kann die erste größer sein, als die zweite, oder umgekehrt, die zweite größer als die erste. Zwei Linien sind gleich, wenn sie mit ihrem einen Endpunkte und ihrer Richtung in einander gelegt auch in dem andern Endpunkte sich decken; eine Linie ist kleiner als die andere, wenn ihr Endpunkt in die andere Linie fällt, sie also nur als ein Theil derselben erscheint.

§. 9.

Größe und Messung der Linien.

Von der Größe der Linien erhalten wir eine deutliche Vorstellung durch ihre Ausmessung. Eine Linie messen heißt, sie mit einer andern bekannten Linie ihrer Größe nach vergleichen. Die bekannte Linie heißt das Maß oder die Einheit und die Größe der zu messenden Linie wird durch die Zahl (Maßzahl) ausgedrückt, welche angibt, wie viel mal das Maß oder ein endlicher bestimmter Theil von ihm in der zu messenden Linie enthalten ist.

§. 10.

Commensurabele und incommensurabele Linien.

Zwei Linien haben ein gemeinschaftliches Maß oder heißen gegen einander commensurabel, wenn sie durch eine dritte Linie zugleich gemessen werden; sie heißen dagegen incommensurabel, wenn es keine noch so kleine dritte Linie gibt, die beide zugleich mißt oder in beiden sich ohne Rest abtragen läßt.

Bemerkung. Die Incommensurabilität der Linien folgt aus dem Begriffe ihrer Stetigkeit und läßt sich leicht veranschaulichen, wenn man sich zuerst zwei Linien vorstellt, die irgend ein beliebig kleines gemeinschaftliches Maß haben, dann die eine um irgend ein Stück vergrößert oder verkleinert, das kleiner ist als das gemeinschaftliche Maß. Da man nun das gemeinschaftliche Maß von jeder beliebigen Kleinheit annehmen kann, so ist die Möglichkeit der Incommensurabilität ersichtlich. Bei empirischen Messungen, selbst wenn sie mit der größten Genauigkeit ausgeführt werden, erscheinen alle Linien zuletzt als commensurabele Linien.

§. 11.

Gemeinschaftliches Maß incommensurabeler Linien.

Sind zwei Linien incommensurabel oder haben sie kein endliches gemeinschaftliches Maß, so lassen sie sich doch durch die unendlich kleine Linie messen, da sie beide aus ihr als aus ihrer Ureinheit durch stetige Bewegung sich gebildet haben.

Bemerkung. Fragt man in diesem Falle nach einem genauen Ausdrucke ihres Größenverhältnisses in Zahlen, so läßt man sich nach den Grundregeln der Logik eine Absurdität zu Schulden kommen, da jeder Zahl eine endliche Länge als Einheit zum Grunde liegen muß.

§. 12.

Rationale und Irrationale Zahlen.

Das Größenverhältniß commensurabeler Linien, das durch ihre Maßzahlen vollständig ausgedrückt wird, heißt rational und jene Zahlen rationale Zahlen, das Größenverhältniß incommensurabeler Linien dagegen, das durch keine Zahlen vollständig ausgedrückt werden kann, heißt irrational und jene Zahlen, die es ausdrücken sollen, Irrational-Zahlen. Die Größenverhältnisse zweier Linienpaare sind gleich, wenn sie durch dieselben rationalen oder irrationalen Maßzahlen ausgedrückt sind.

§. 13.

Kennzeichen für die Commensurabilität oder Incommensurabilität.

Um in einem bestimmten Falle beurtheilen zu können, ob zwei Linien commensurabel oder incommensurabel sind, trage man die kleinere auf der größern ab, bleibt bei dieser Abtragung kein Rest, so sind die Linien commensurabel, und die kleinere Linie selbst ist das gemeinschaftliche Maß. Bleibt ein Rest, so trage man diesen ebenso auf der kleinern Linie ab und fahre mit dieser Abtragung der folgenden immer kleiner werdenden Reste auf dem vorhergehenden so lange Zeit fort, bis man zu einem Reste kommt, der sich genau auf dem vorigen Reste abtragen läßt, ohne einen neuen Rest zu lassen und ein gemeinschaftliches Maß bildet. Gelangt man aus schon früher erwiesenen Sätzen zu der Ueberzeugung, daß bei jeder folgenden Abtragung ohne Ende wieder ein Rest bleiben muß, so sind die Linien nothwendig incommensurabel, da die Reste immer kleiner werden und keine andere Grenze als die unendlich kleine Linie finden.

Bemerkung. Absichtlich ist nicht von dem größten gemeinschaftlichen Maße die Rede, da der Beweis für die richtige Aufsuchung desselben für den Anfänger zu ermüdend ist. Bei einer größern Repetition, nachdem der Anfänger schon hinreichend in mathematischer Beweisführung geübt ist, kann der Beweis dafür ebenso wie in der Arithmetik in aller Strenge geliefert werden.

§. 14.

Eintheilung des Maßes.

Für die Messung der Linien wird in jedem Lande irgend eine bestimmte, gesetzlich festgestellte Länge, gewöhnlich der Fuß als Einheit angenommen. Um größere Längen nicht durch zu große Zahlen ausdrücken zu müssen, faßt man eine bestimmte Menge von Haupteinheiten zu höhern Einheiten zusammen (Toisen, Faden, Ruthen, geographische Meilen u. s. w.) und um bei kleinern Längen Bruchzahlen zu vermeiden, sieht man bestimmte Theile der Haupteinheit (Zolle, Linien u. s. w.) als niedere Einheiten an.

Bemerkung. 1. Erläuterung über das landesübliche Maß und seine Eintheilung, sowie über Werkmaß und Decimalmaß. 2. Ueber die große Verschiedenheit der landesüblichen Maße und die Schwierigkeit eine unveränderliche Maßeinheit zu finden und herzustellen. 3. Ueber Maßstäbe, Messketten, Messschnüre u. s. w.

§. 15.

Vergleichung der verschiedenen landesüblichen Maße.

Die Länge der verschiedenen landesüblichen Maße wird entweder mit der alten oder neuen französischen Maßeinheit (Fuß oder Metre) verglichen und ihr Größenverhältniß gewöhnlich durch Angabe der Anzahl von Pariser Linien (144 auf einen Pariser Fuß) ausgedrückt, die sie enthalten z. B.

ein französischer Fuß	=	144	Pariser Linien
„ rheinl. „	=	139,1	„ „
„ engl. „	=	135,1	„ „
„ Braunschw. „	=	126,5	„ „

1 Metre = $3\frac{1}{2}$ Braunschw. Fuß annähernd.

Bemerkung. Erläuterung des Reductionsverfahrens um Längenangaben des einen Maßes in die des andern zu verwandeln.

§. 16.
Aeußere Darstellung und Messung der Linien.

Wie wir in unserer Phantasie oder innern Raumwelt Linien ziehen, verlängern, verdoppeln, vervielfachen und messen, ist schon in dem vorigen Paragraphen enthalten. Aeußerlich zeichnen und messen wir Linien mit Lineal und Zirkel, den Repräsentanten der unveränderten Richtung und der durch die beiden Endpunkte bestimmten Länge einer jeden Linie.

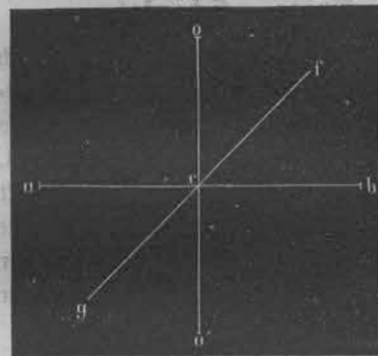
Bemerkung. 1. Erläuterung über Anfertigung von Linealen, Maßstäben und ihre Prüfung. 2. Erläuterung über die verschiedenen Arten von Zirkeln und ihre Verwendung zur Linienconstruction unabhängig von der Kreisconstruction. 3. Erläuterung des Verfahrens bei dem Abstecken und Messen auf dem Felde.

§. 17.
Zeichnungen, die mit Lineal und Zirkel auszuführen sind.

1. Zwei Punkte durch eine gerade Linie zu verbinden.
2. Eine Linie zu verlängern.
3. Eine Linie zu verdoppeln.
4. Eine Linie zu vervielfachen.
5. Eine Linie zu zeichnen, die der Summe von zweien oder mehreren Linien gleich ist.
6. Den Unterschied zweier Linien zu zeichnen.
7. Eine Linie zu messen.
8. Eine Linie, deren Größe in Zahlen gegeben ist, darzustellen.
9. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Linien aufzusuchen.

§. 18.
Positive und negative Linien.

Fig. 2.



Jede gerade Linie *ab* kann auf doppelte Weise entstanden sein, entweder durch Bewegung des Punktes *a* von *a* nach *b* oder durch die entgegengesetzte Bewegung des Punktes *b* von *b* nach *a*. Sieht man die Linie durch die eine Bewegung ihres Anfangspunktes als entstanden an, so wird sie durch die darauf folgende Bewegung in entgegengesetzter Richtung zum Theil oder ganz vernichtet. Nennt man daher die erste Richtung die positive, so heißt die ihr entgegengesetzte Richtung passend die negative. Die eine Richtung kann aber so gut wie die andere als die positive angesehen werden. In ähnlichem Sinne nennt man nun Theile einer und derselben Linie, die in entgegengesetzter Richtung von einem Punkte in ihr liegen, positive und negative Linien. Die positive Richtung wird mit (+), die negative mit (—) bezeichnet. Im gemeinen Leben bezeichnet man diesen Gegensatz durch vorwärts und rückwärts, links und rechts, aufwärts und abwärts, zu Berg und zu Thal.

Bemerkung. 1. Erläuterung des Gegensatzes in der Richtung an Bewegungen auf der Eisenbahn, auf Dampfschiffen u. s. w. 2. Spätes Hervortreten dieses Gegensatzes in der Wissenschaft und seine Bedeutung in der rechnenden Geometrie (Trigonometrie und analytische Geometrie).

§. 19.
Parallele und nicht parallele Linien.

Zwei Linien können nicht nur ihrer Größe, sondern auch ihrer Richtung nach mit einander verglichen werden und sind dann entweder gleichgerichtet, gleichlaufend (parallel) oder ungleich gerichtet (nicht parallel). Die nicht parallelen Linien nähern sich nach der einen Richtung (convergiren) und entfernen sich von einander nach der entgegengesetzten Richtung (divergiren). Daß zwei Linien *ab* und *cd* parallel sind, wird durch $ab \parallel cd$ bezeichnet, daß sie parallel und gleich sind durch $ab \# cd$. Um über die Parallelität zweier Linien urtheilen zu können, müssen ihre Richtungen mit der Richtung einer dritten sie durchschneidenden Linie verglichen werden.

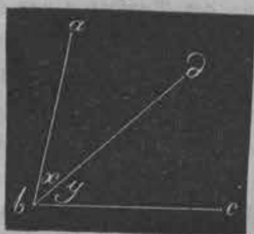
Dies kann aber erst geschehen, nachdem die zweite Grundconstruction, der Winkel, untersucht ist.

B. Vom Winkel.

§. 20.

Entstehung des Winkels. Spitze — Schenkel.

Fig. 3.



Dreht eine Linie von unbestimmter Länge sich um ihren festliegenden Anfangspunkt aus ihrer ursprünglichen Lage in irgend eine andere Lage, so nennt man den Richtungsunterschied der Linien Winkel, ihren festliegenden gemeinschaftlichen Anfangspunkt Spitze (Scheitel) und sie selbst Schenkel. Die Größe des Winkels hängt demnach nicht von der Länge der Schenkel, sondern von der Größe der Drehung ab.

§. 21.

Bezeichnung der Winkel.

Winkel werden entweder durch einen Buchstaben vor der Spitze, oder durch einen Buchstaben zwischen den Schenkeln, oder durch drei Buchstaben bezeichnet, von denen der Buchstabe an der Spitze in der Mitte stehen muß.

Bemerkung. Bezeichnet man die Linien mit lateinischen Buchstaben, so ist für die Winkel die Bezeichnung mit einem griechischen Buchstaben zwischen den Schenkeln am bequemsten und am leichtesten auch ohne Figur aufzufassen.

§. 22.

Größe und Eintheilung der Winkel.

Läßt man bei der Entstehung des Winkels die Linie eine vollständige Drehung machen, bis sie wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehrt, so beschreibt sie einen vollen Winkel; bei einer halben Drehung, wenn die beiden Schenkel eine gerade Linie bilden, einen gestreckten oder geraden Winkel und bei einer Vierteldrehung, oder wenn die eine Linie senkrecht, perpendikular ($\perp$) auf der andern steht, einen rechten Winkel (*R*). Je nachdem Winkel größer oder kleiner als gestreckte Winkel sind, heißen sie convexe oder concave Winkel. Winkel, die kleiner oder größer als ein Rechter sind, heißen spitze oder stumpfe und beide im Gegensatz zum Rechten schiefe Winkel.

§. 23.

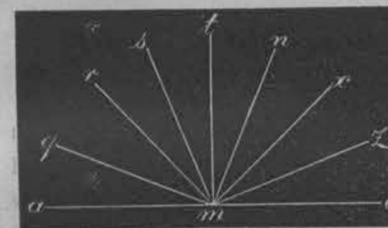
Gleichheit der rechten und gestreckten Winkel.

Alle rechte und gestreckte Winkel sind gleich, weil sie gleichbenannte Theile eines und desselben vollen Winkels sind.

§. 24.

Lothrecht und wagerecht.

Fig. 4.



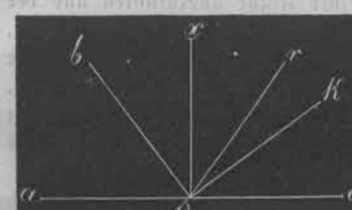
Zwei Linien, die mit einander rechte Winkel bilden, heißen nach dem vorigen Paragraphen senkrecht aufeinander oder perpendikular. Auf einer Linie gibt es in einem Punkte immer nur ein Perpendikel, weil alle rechten Winkel gleich sind. Eine Linie, welche die Richtung eines Lothes hat, heißt lothrecht, und die Linie, welche mit ihr rechte Winkel bildet oder die Richtung eines im Gleichgewicht sich befindenden Wagebalkens hat, heißt wagerecht, horizontal, wasserrecht.

Bemerkung. Erläuterung des Unterschiedes zwischen senkrecht und lothrecht, sowie der gewöhnlichen Instrumente zur Abtragung schiefer und rechter Winkel, der Schmiege und des Winkelhakens oder rechten Winkels, des Lothes, der Setz- und Wasserwage und ihrer verschiedenen Formen.

§. 25.

Winkelmessung.

Fig. 5.



Zur Messung der Winkel dient der rechte Winkel als Einheit. Um kleinere Winkel ohne Bruchzahlen ausdrücken zu können, theilt man den rechten Winkel in 90 gleiche Theile oder Grade (^{0}), den Grad in 60 gleiche Theile oder Minuten ($'$) und die Minute in 60 gleiche Theile oder Secunden ($''$).

Bemerkung. 1. Wie ein Winkel durch krumme und gerade vor ihm gezogene Linien gemessen werden kann, wird bei der Lehre vom Kreise und in der Trigonometrie gezeigt werden. 2. Beschreibung der einfachen Winkelinstrumente, des Transporteurs und der Boussole; Abhängigkeit der Astronomie von den Winkelinstrumenten und den Grenzen ihrer jetzigen Eintheilung; Gebrauch des Transporteurs und seine Mängel. —

§. 26.

Nebenwinkel — Scheitelwinkel.

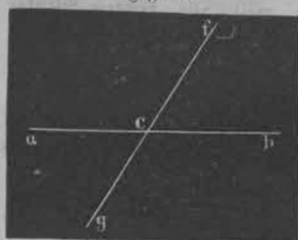
Wird ein Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus verlängert, so entsteht noch ein zweiter Winkel, der in Bezug auf den ersteren, den Hauptwinkel, sein Nebenwinkel heißt; werden beide Schenkel über den

Scheitelpunkt verlängert, so entsteht zwischen ihren Verlängerungen außer den beiden Nebenwinkeln noch ein dritter Winkel, der Scheitelwinkel des ursprünglichen Winkels. Zwei Winkel sind sich gegenseitig Nebenwinkel oder Scheitelwinkel.

§. 27.

Größe der Nebenwinkel.

Fig. 6.



Alle Nebenwinkel sind zwei rechten Winkeln gleich, denn sie sind einem gestreckten Winkel gleich. Alle Winkel über einer geraden Linie si. d zwei Rechten gleich, denn sie sind einem gestreckten gleich. Alle Winkel um einen Punkt sind 4 Rechten gleich; denn sie sind zwei gestreckten oder einem vollen Winkel gleich.

§. 28.

Größe der Scheitelwinkel.

Scheitelwinkel sind gleich; denn verbindet man jeden mit einem und demselben Nebenwinkel zu einem gestreckten Winkel, so sind diese gleich und daher auch die Scheitelwinkel.

Bemerkung. 1. Der Beweis ist an einer Figur auszuführen und der Schüler auf die verschiedenen Abänderungen in ihm aufmerksam zu machen. 2. Die Umkehrung der beiden vorhergehenden Sätze kann später bei einer Repetition nachgeholt werden, da sie von wenig practischer Bedeutung sind. 3. Von dem Größenverhältnisse von Winkeln, die durch Perpendikel auf den Schenkeln gegebener Winkel entstehen, zu diesen Winkeln selbst, wird später gehandelt werden.

§. 29.

Folgerung.

Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel und gleiche Scheitelwinkel.

§. 30.

Aufgaben.

Zu einem Winkel seinen Nebenwinkel oder Scheitelwinkel zu zeichnen. Einen Winkel mit dem Transporteur zu messen und einen in Graden angegebenen Winkel zu zeichnen. Zu einem Winkel seinen Nebenwinkel durch Rechnung zu finden. Winkelreductionen und Winkelresolutionen auszuführen. —

Zweiter Abschnitt.

Von parallelen Linien und Winkeln mit parallelen Schenkeln.

§. 1.

Grundsatz für die Parallelität.

Wenn zwei Linien zu einer dritten sie durchschneidenden Linie dieselbe Richtung haben oder nicht, so haben sie auch unter sich dieselbe Richtung oder nicht und sind parallel oder nicht parallel.

Bemerkung. Dieser Satz sowie seine Umkehrung ist für die Parallelität der Linien auf dieselbe Weise ein Grundsatz und keines Beweises fähig, wie es der Satz „zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich" für die Größenvergleichung ist. Alle Versuche, einen Beweis für diesen Satz zu finden oder ihn ganz zu vermeiden, sind bis jetzt als gescheitert zu betrachten.

§. 2.

Folgerung.

Parallele Linien können sich nie schneiden; denn schnitten sie sich, so bildeten sie einen Winkel, hätten also verschiedene Richtung und wären demnach nicht parallel.

§. 3.

Folgerung.

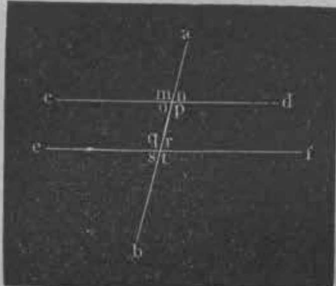
Nicht parallele Linien müssen sich weit genug verlängert schneiden; denn schnitten sie sich nicht, so wären sie nach dem vorigen Paragraph parallel.

§. 4.

Gegenwinkel — Wechselwinkel u. s. w.

Wenn zwei Linien von einer dritten geschnitten werden, so entstehen an den beiden Durchschnittspunkten 4 Winkel, von denen die 4 außerhalb oder innerhalb der geschnittenen Linie liegenden äußere oder innere heißen. Gegenwinkel (correspondirende Winkel) heißen je zwei Winkel, die nicht an demselben Durchschnittspunkte liegen, aber an derselben Seite der schneidenden und geschnittenen Linien. Wechselwinkel heißen je zwei Winkel, die nicht an demselben Durchschnittspunkte, an verschiedenen Seiten der schneidenden und geschnittenen Linien liegen. Die Erklärung von äußeren oder inneren Winkeln an derselben Seite der schneidenden Linie liegt in der Benennung schon vollständig ausgedrückt.

Fig. 7.



Bemerkung. Erläuterung der verschiedenen Benennungen an Fig. 7. Wie viele Paare von Gegenwinkeln, Wechselwinkeln u. s. w. gibt es? Welche Bestimmung in der Erklärung ist allen drei Winkelpaaren gemeinschaftlich, wodurch sie sich von den Scheitelwinkeln und Nebenwinkeln unterscheiden?

§. 5.

Größenverhältniß dieser Winkel.

1. Wenn zwei Gegenwinkel gleich sind, so sind alle übrigen Paare von Gegenwinkeln und Wechselwinkeln auch gleich und die inneren und äußeren Winkel an derselben Seite der schneidenden Linie betragen zwei Rechte.

2. Wenn zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind u. s. w. wie in Nr. 1.

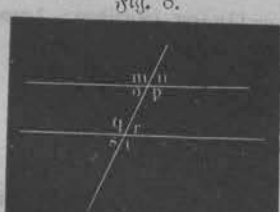
3. Wenn zwei innere oder äußere Winkel an derselben Seite der schneidenden Linie zwei Rechte betragen, so betragen nicht allein die anderen äußeren und inneren Winkelpaare an derselben Seite der schneidenden Linie auch zwei Rechte, sondern alle Gegenwinkel und Wechselwinkel sind auch einander gleich.

Beweis zu 1:

Wenn in Fig. 8. $n = r$ ist

so ist 1. $p = t$ (Nebenwinkel gleicher Winkel)
2. $m = q$ („ „ „)
3. $o = s$ (Scheitelwinkel „ „)
4. $o = r$ (Zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich)
5. $p = q$ (Nebenwinkel gleicher Winkel)
6. $m = t$ („ „ „)
7. $n = s$ (wie in Nr. 4)
8. $p + r = 2R$ (da $n + p = 2R$ u. $n = r$ ist)
9. $o + q = 2R$ (da $q + r = 2R$ u. $r = o$ ist)
10. $m + s = 2R$ (da $m + n = 2R$ u. $n = s$ ist)
11. $n + t = 2R$ (da $r + t = 2R$ u. $r = n$ ist).

Fig. 8.



Bemerkung. Der Beweis zu 2 und 3 ist dem zu 1 ganz ähnlich und kann bei der Repetition von den Schülern geführt werden.

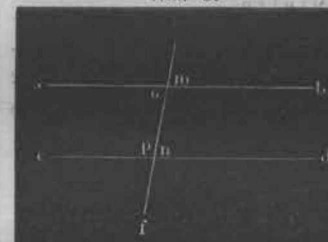
§. 6.

Bedingungen für die Parallelität.

Zwei Linien, die von einer dritten geschnitten werden, sind parallel,

1. wenn zwei Gegenwinkel gleich sind,
2. wenn zwei Wechselwinkel gleich sind,
3. wenn zwei innere oder äußere Winkel an derselben Seite der schneidenden Linie $2R$ betragen.

Fig. 9.



Beweis zu 1:

Wenn, wie in Fig. 9. $m = n$ ist

so ist $ab \parallel cd$;

denn dann haben die Linien ab und cd zu der schneidenden Linie ef dieselbe Richtung und sind daher nach dem Grundsatze in §. 1 parallel.

Beweis zu 2: Wenn $n = o$ ist

so ist $ab \parallel cd$;

denn dann ist nach §. 5 auch $m = n$ und daher nach 1 die Parallelität erwiesen.

Beweis zu 3: Wenn $o + p = 2R$ ist

so ist $ab \parallel cd$;

denn dann ist nach §. 5 auch $m = n$ und daher die Parallelität nach 1 erwiesen.

Bemerkung. Dem Lehrer bleibt es überlassen, diese kurz ausgedrückten Beweise weiter nach eigenem Ermessen auszuführen, wenn er es für nöthig hält. Doch darf über Rettung und Wahrung der logischen Regeln nicht die Aufmerksamkeit der Schüler verloren gehen.

§. 7.

Folgen der Parallelität.

Wenn zwei Linien parallel sind und von einer dritten geschnitten werden, so sind

1. die Gegenwinkel gleich,
2. die Wechselwinkel gleich,
3. betragen die innern und äußern Winkel an derselben Seite der schneidenden Linie $2R$.

Beweis zu 1: Wenn $ab \parallel cd$

so ist 1. $m = n$ u. s. w.

Denn wenn $ab \parallel cd$ ist, so haben ab und cd zu ef dieselbe Richtung (§. 1) oder die Winkel m und n sind einander gleich. Aus ihrer Gleichheit aber folgt die Richtigkeit der vollständigen Behauptung nach §. 5. Die Beweise zu 2 und 3 werden aus der ersten Behauptung mit Anwendung der Sätze in §. 5 abgeleitet.

Bemerkung. Aehnlich den Sätzen in §. 6 und §. 7 lassen sich auch Sätze für die Bedingungen und Folgen der Nichtparallelität von Linien aufstellen, die hier übergangen sind, weil sie weder in der Wissenschaft noch in der Praxis von Bedeutung sind und leicht durch indirecte Beweise aus frühern Sätzen dargethan werden können.

§. 8.
Parallelität dreier Linien.

Zwei Linien, die einer dritten parallel sind, sind auch unter sich parallel. Denn verbindet man sie durch eine vierte durchschneidende Linie, so sind ihre Gegenwinkel gleich, da sie einem und demselben dritten Winkel gleich sind und daher die Linien nach §. 6 parallel.

§. 9.
Zeichnung paralleler Linien.

Wie streng geometrisch mit gerader Linie und Kreis parallele Linien gezeichnet werden, kann erst später gezeigt werden. Zur praktischen Zeichnung auf dem Papier bedient man sich außer Lineal und Zirkel, des Lineals und rechten Winkels oder rechtwinkligen Dreiecks, des Parallellineals, der Reißschiene u. s. w.

Bemerkung. Der Gebrauch der im §. angeführten Instrumente muß nicht allein flüchtig erklärt, sondern tüchtig eingeübt werden, damit der Schüler aus dem Gebrauche selbst die Nach- und Vortheile der einen oder andern Zeichnungsart kennen lernt.

§. 10.
Winkel mit parallelen Schenkeln.

Wenn bei zwei Winkeln die beiden Schenkelpaare des einen den beiden Schenkelpaaren des andern parallel sind, so heißen sie Winkel mit parallelen Schenkeln. Die parallelen Schenkelpaare können in beiden Winkeln vom Scheitelpunkte aus

a. beide dieselbe
b. beide entgegengesetzte
c. ein Paar dieselbe, ein Paar entgegengesetzte
} Richtung haben, wie in

Fig. 10.

Fig. 11.

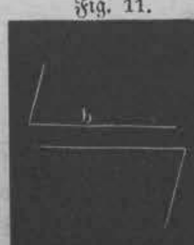
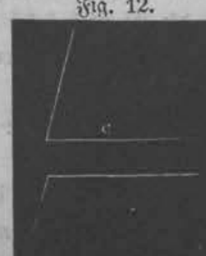


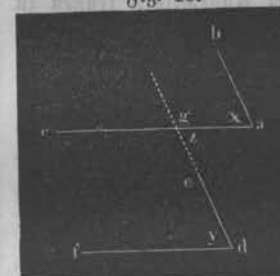
Fig. 12.



§. 11.
Größenverhältniß der Winkel mit parallelen Schenkeln.

1. Winkel mit parallelen Schenkeln sind gleich
   a. wenn beide Schenkelpaare dieselbe } Richtung
   b. " " " entgegengesetzte } haben.

Fig. 13.



Beweis zu 1:

Ist in Fig. 13 $ab \parallel de$ } mit derselben Richtung
und $ac \parallel df$ } von a und d aus
so ist $x = y$.

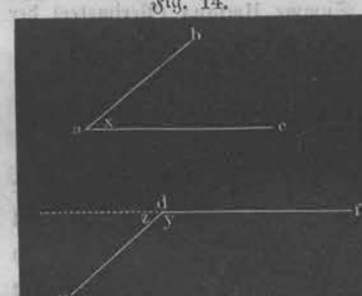
Denn verlängert man nöthigenfalls zwei nicht parallele Schenkel, etwa de und ac, bis zum Durchschnittspunkte g, so ist der entstandene Hülfswinkel

$z = x$ (als Wechselwinkel)
und zugleich $z = y$ " "
Daher $x = y$.

Der Beweis zu b ist dem zu a völlig ähnlich. Wie verhalten sich die gegenüberliegenden Winkel, wenn zwei parallele Linien von zwei andern parallelen Linien geschnitten werden?

2. Winkel mit parallelen Schenkeln ergänzen sich zu zwei Rechten, wenn ein Schenkelpaar dieselbe, das andere entgegengesetzte Richtung hat.

Fig. 14.



Beweis:

Wenn $ab \parallel ed$ mit entgegengesetzter Richtung von a und d aus
und $ac \parallel df$ mit derselben Richtung,
so ist $x + y = 2R$.

Denn zeichnet man zu dem einen Winkel etwa y seinen Nebenwinkel z,
so ist $z + y = 2R$ (Nebenwinkel), da
aber zugleich $z = x$ (1, b.)
so ist $x + y = 2R$.

Bemerkung. Der Schüler muß sich fleißig in der Zeichnung von Winkeln mit parallelen Schenkeln üben, da ihm der Beweis für das Größenverhältniß sehr leicht wird, während ihm die rasche Zeichnung von Winkeln mit parallelen Schenkeln in vorgeschriebenen Lagen Schwierigkeiten verursacht.

§. 12.
Uebergang.

Nachdem wir die beiden Grundconstructionen, gerade Linie und Winkel, erst an und für sich und dann in Bezug auf einander betrachtet hatten, kamen wir zu den parallelen Linien und zu den Winkeln mit parallelen Schenkeln. Wenn jedoch die von einer dritten geschnittenen Linien nicht parallel sind, so kommen wir auf die in sich zurücklaufende gebrochene Linie und auf die einfachste geradlinige Figur, das Dreieck, was uns nöthigt, nun näher die in sich zurücklaufenden Linien und Figuren zu untersuchen, um ihre Eigenschaften und Beziehungen zu den Grundconstructionen erst im Allgemeinen kennen zu lernen, bevor wir zu den Eigenschaften und Beziehungen der einzelnen Klassen von Figuren übergehen.

Dritter Abschnitt.

Von den Figuren im Allgemeinen, dem Dreiecke und Kreise im Besondern.

§. 1.
Figur.

Eine vollständig begrenzte Ebene heißt eine Figur; die einzelnen sie begrenzenden Linien heißen Seiten und ihre Summe Umfang (Perimeter) der Figur (Fig.).

§. 2.
Eintheilung der Figuren.

Die Figuren zerfallen nach der Beschaffenheit ihrer Seiten in geradlinige und krummlinige Figuren. Die geradlinigen Figuren werden nach der Anzahl ihrer Seiten in dreiseitige, vierseitige, vielseitige und die krummlinigen nach der Beschaffenheit der krummen Linien in gleichförmige und ungleichförmige eingetheilt.

§. 3.
Anzahl der Seiten und Winkel.

In jeder geradlinigen Figur ist die Anzahl der Seiten und Winkel gleich. Denn in jeder geradlinigen Figur bildet nicht nur jede folgende Seite mit der vorhergehenden einen Winkel, sondern auch die letzte mit der ersten. Daher werden die geradlinigen Figuren auch nach der Anzahl der Winkel oder Ecken, Dreiecke, Vierecke, Vielecke (Polygone) genannt.

§. 4.
Größenverhältniß der Seiten.

In jeder geradlinigen Figur ist eine Seite kleiner als die Summe aller übrigen nach I. §. 4.

§. 5.
Dreieck, Gegenseiten, Gegenwinkel.

Jede von drei geraden Linien als Seiten begrenzte ebene Figur heißt ein Dreieck. Da in ihm jeder Seite ein Winkel und jedem Winkel eine Seite gegenüberliegt, so ist jede Seite in Bezug auf den ihr gegenüberliegenden Winkel Gegenseite und jeder Winkel in Bezug auf die ihm gegenüberliegende Seite Gegenwinkel.

§. 6.
Bezeichnung.

Ein Dreieck bezeichnet man mit $\triangle$ und den an seinen Winkelspitzen stehenden großen Buchstaben des lat. Alphabets, während man seine Winkel mit den entsprechenden kleinen Buchstaben des griechischen und ihre Gegenseiten mit denselben kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabets zu bezeichnen pflegt.

Bemerkung. Die Bezeichnung des Dreiecks ist sorgfältig einzuüben, damit sich der Anfänger von vornherein gewöhne, Constructionen auch ohne sichtbare Figuren richtig aufzufassen.

§. 7.

In jedem Dreiecke sind zwei Seiten größer als die dritte (§. 4).

§. 8.
Unterschied zweier Seiten.

In jedem Dreiecke ist der Unterschied zweier Seiten kleiner, als die dritte Seite.

Beweis: Denn bezeichnet man die 3 Seiten des $\triangle ABC$ mit a, b, c und ist $a > b > c$, so ist $b + c > a$ und $a + c > b$ (§. 7). Zieht man nun auf beiden Seiten der ersten Ungleichung b oder c ab, so erhält man 1. $b > a - c$ und 2. $c > a - b$; zieht man ebenso von der zweiten Ungleichung c ab, so erhält man 3. $a > b - c$.

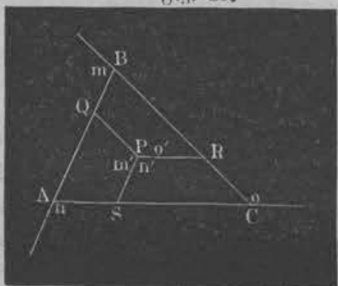
§. 9.
Außenwinkel.

Verlängert man eine Seite eines Dreiecks, so heißt der durch die Verlängerung und Nachbarseite gebildete Winkel Außenwinkel des Dreiecks. Da sich jede Seite über jeden Endpunkt hinaus verlängern läßt, so kann ein Außenwinkel auf sechsfache Weise gebildet werden.

§. 10.
Größe der drei Außenwinkel.

Verlängert man alle drei Seiten eines Dreiecks nach einer Seite hin, so betragen die drei Außenwinkel so viel als die Winkel um einen Punkt, d. h. vier Rechte. Denn nimmt man im Dreieck ABC den Punkt P an und zieht von ihm aus $PR \parallel AC$, $PQ \parallel BC$ und $PS \parallel AB$ u. s. w., so ist $m = m'$, $n = n'$, $o = o'$, (II. §. 11); daher $m + n + o = m' + n' + o' = 4R$.

Fig. 15.



Bemerkung. Der Beweis kann auch ohne Hilfsconstruction durch unmittelbare Nachweisung einer vollen Umdrehung geführt werden.

§. 11.
Größe der 3 innern Winkel eines Dreiecks.

Die drei innern Winkel im Dreieck betragen 2 Rechte. Denn da die Außenwinkel 4 Rechte und die Innen- und Außenwinkel als drei Nebenwinkelpaare 6 Rechte betragen, so betragen die inneren Winkel allein 2 Rechte.

§. 12.
Größe des einzelnen Außenwinkels.

Jeder Außenwinkel ist den beiden innern Winkeln gleich, die nicht seine Nebenwinkel sind. Denn da jeder Außenwinkel mit seinem innern Nebenwinkel 2 Rechte bildet, die 3 innern Winkel auch 2 Rechten gleich sind, so ist der Außenwinkel allein den beiden andern innern Winkeln gleich.

§. 13.
Zusätze.

1. Jeder Außenwinkel ist größer als einer der innern Winkel, die nicht seine Nebenwinkel sind.
2. Jeder Außenwinkel ist das Doppelte des einen innern Winkels, wenn beide innere Winkel gleich sind.
3. In jedem Dreiecke sind 2 Winkel kleiner als 2 R.
4. In jedem Dreiecke gibt es nur einen stumpfen oder rechten Winkel.
5. In jedem Dreiecke ist durch 2 Winkel auch der dritte bestimmt.
6. Von einem Punkte außerhalb einer Linie kann auf dieselbe nur ein Perpendikel gefällt werden.

§. 14.
Eintheilung der Dreiecke nach den Seiten.

Ein Dreieck mit drei gleichen Seiten heißt gleichseitig, mit zwei gleichen Seiten gleichschenklig und ohne gleiche Seiten ungleichseitig. Die gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks heißen Schenkel, die ungleiche Seite Basis (Grundlinie), sowie ihr Gegenwinkel, Spitze.

§. 15.
Eintheilung der Dreiecke nach den Winkeln.

Dreiecke mit einem stumpfen Winkel heißen stumpfwinklige, mit einem rechten Winkel rechtwinklige und mit 3 spitzen Winkeln spitzwinklige Dreiecke.

§. 16.
Größe von 2 spitzen Winkeln in einem Dreiecke.

Die beiden spitzen Winkel eines stumpfwinkligen Dreiecks sind kleiner, eines spitzwinkligen größer als ein Rechter und die spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind einem Rechten gleich.

§. 17.
Aufgaben.

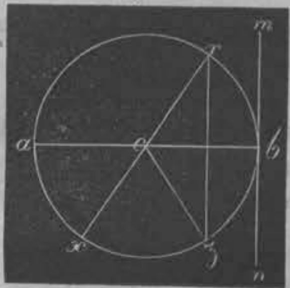
1. Zu 2 gegebenen Winkeln eines Dreiecks den dritten durch Rechnung zu finden.
2. Aus dem Außenwinkel und dem einen innern Winkel den andern innern Winkel zu finden.
3. Aus einem spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks den andern spitzen Winkel zu finden.

§. 18.

Entstehung des Kreises.

Ein Kreis entsteht, wenn sich eine Gerade von bestimmter Länge um ihren einen festliegenden Endpunkt nach einer Seite so lange dreht, bis sie wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehrt. (Fig. 16). Der festliegende Punkt heißt Mittelpunkt (Centrum), die sich drehende Linie Halbmesser (Radius) und die begrenzende Linie Kreislinie, Kreis, Umfang (Peripherie). Wodurch unterscheidet sich die Kreisconstruction von der Winkelconstruction?

Fig. 16.



§. 19.

Erklärung der Kunstausdrücke beim Kreise.

Jede gerade Linie zwischen zwei Punkten der Peripherie heißt Sehne (chorda) und jede Sehne durch den Mittelpunkt Durchmesser. Jeder Theil der Peripherie heißt Bogen, jeder Theil der Kreisfläche, der durch Bogen und Sehne begrenzt wird, Kreisabschnitt (segmentum) und jeder Theil der durch einen Bogen und 2 Radien begrenzt wird, Kreisausschnitt (sector). Ist der Halbkreis ein Ausschnitt oder Abschnitt?

§. 20.

Folgerungen aus der Entstehung des Kreises.

1. Alle Radien im Kreise sind gleich oder alle Punkte der Peripherie sind gleich weit vom Mittelpunkte entfernt.

2. Alle Durchmesser sind gleich.

3. Der Kreis ist eine gleichförmig gekrümmte Linie, oder beliebige Bogentheile einer Kreislinie auf einander gelegt müssen sich decken.

4. Die Lage eines Kreises ist durch den Mittelpunkt und seine Größe durch den Radius oder Durchmesser bestimmt.

5. Kreise mit gleichen Radien decken sich, wenn sie mit den Mittelpunkten auf einander gelegt werden.

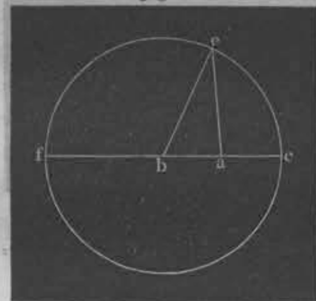
6. Ein Punkt liegt in der Peripherie oder innerhalb oder außerhalb des Kreises, je nachdem seine Entfernung vom Mittelpunkte dem Radius gleich oder kleiner oder größer als der Radius ist.

§. 21.

Entfernung eines Punktes von der Peripherie eines Kreises.

Von jedem Punkte 1. innerhalb oder 2. außerhalb eines Kreises können unzählige Linien an die Peripherie desselben gezogen werden. Unter diesen liegt die kleinste und größte auf der Centrale und deren Verlängerung. (Fig. 17.) Bezeichnet man die kleinste Entfernung des Punktes a mit e, die größte mit E, den Radius mit r und den Durchmesser mit d, so ist

Fig. 17.



1. für einen Punkt innerhalb des Kreises $E = 2r - e = d - e$
2. „ „ „ außerhalb „ „ $E = 2r + e = d + e$.

Beweis zu 1: Liegt a innerhalb des Kreises um b, so ziehe man durch a den Durchmesser fc und nach irgend einem Punkte e der Peripherie die Linien be und ae,
so ist 1. $ae + ab > be$ oder $ae + ab > ab + ac$ oder $ae > ac$
aber 2. $ae < ab + be$ oder $ae < ab + fb$ oder $ae < af$,
d. h. ac ist kleiner und af ist größer als jede andere Linie ae, die durch den Punkt a gezogen werden kann. Da
$ac + af = e + E = d$, so ist $E = d - e = 2r - e$.

Beweis zu 2: Für einen Punkt außerhalb des Kreises ist der Beweis dem zu 1 ähnlich.

§. 22.

Concentrische — excentrische Kreise.

Kreise, die von demselben Mittelpunkte beschrieben sind, heißen concentrisch, Kreise, die von verschiedenen Mittelpunkten beschrieben sind, heißen excentrisch. Centrale heißt die Entfernung der Mittelpunkte zweier excentrischen Kreise oder die Entfernung irgend eines Punktes von dem Mittelpunkte eines Kreises. Wie müssen die Radien verschiedener concentrischen Kreise beschaffen sein?

§. 23.

Verschiedenheit der Lage excentrischer Kreise.

Läßt man von zwei verschiedenen ganz außer einander liegenden excentrischen Kreisen den einen, etwa den kleinern, auf der Centrale dem größern näher rücken, so wird seine Peripherie

1. ganz außerhalb der anderen liegen, wenn sie durch ein Stück der Centrale von ihr getrennt ist (Fig. 18),

Fig. 18.

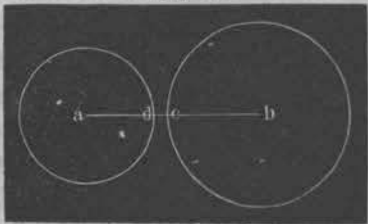
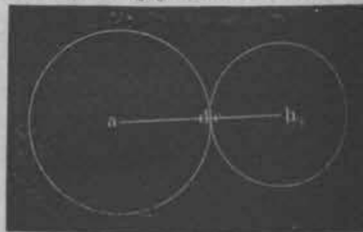


Fig. 19.



2. ganz außerhalb der anderen liegen, aber sie in einem Punkte berühren, wenn sie einen Punkt der Centrale mit ihr gemein hat (Fig. 19),

3. zum Theil innerhalb der anderen liegen und sie in zwei Punkten schneiden, wenn sie einen Theil der Centrale mit ihr gemein, aber ihren Mittelpunkt noch außerhalb der andern Peripherie hat (Fig. 20),

Fig. 20.

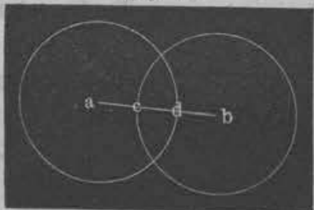


Fig. 21.

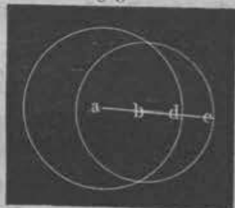
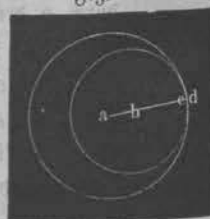


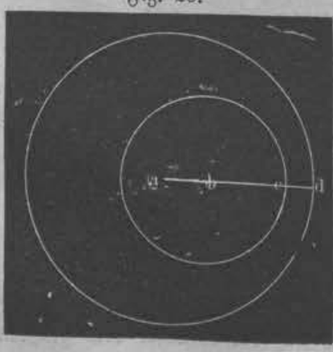
Fig. 22.



4. zum Theil innerhalb der anderen liegen und sie in 2 Punkten schneiden, wenn sie einen Theil der verlängerten Centrale mit ihr gemein und auch ihren Mittelpunkt innerhalb der anderen Peripherie hat (Fig. 21),

5. ganz innerhalb der anderen liegen und sie in einem Punkte berühren, wenn sie einen Punkt der verlängerten Centrale mit ihr gemein hat (Fig. 22),

Fig. 23.



6. ganz innerhalb der andern liegen, wenn sie durch ein Stück der verlängerten Centrale von ihr getrennt ist (Fig. 23).

Daß die Kreise die in 1 — 6 angeführten Lagen unter den angegebenen Bedingungen haben, folgt unmittelbar aus §. 21.

§. 24.

Größenverhältniß der Radien und Centralen in den verschiedenen Lagen excentrischer Kreise.

Bezeichnet man die Radien mit R und r und die Centrale mit e, so ist in Lage

1) $e > R + r$; denn in Fig. 18 ist $e = R + r + cd$
2) $e = R + r$; „ „ „ 19 „ $e = R + r$
3) $e < R + r$; „ „ „ 20 „ $e = R + r - cd$
4) $e > R - r$; „ „ „ 21 „ $e = R - r + cd$
5) $e = R - r$; „ „ „ 22 „ $e = R - r$
6) $e < R - r$; „ „ „ 23 „ $e = R - r - cd$.

Bemerkung. Die in diesem Paragraph aus §. 23 gefolgerten Größenverhältnisse zwischen den Radien und der Centrale enthalten zugleich auch umgekehrt die Bedingungen für die entsprechenden Lagen 1 — 6. Denn wenn z. B. $e = R + r$ ist und man beschreibt aus den Endpunkten von e mit R und r Kreise, so haben diese einen Punkt gemein und liegen ganz außer einander nach §. 21.

§. 25.

Lage des Berührungspunktes.

Wenn sich zwei Kreise von außen oder innen berühren, so geht die Centrale durch den Berührungspunkt (Fig. 24).

Fig. 24.

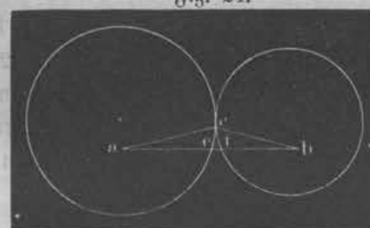
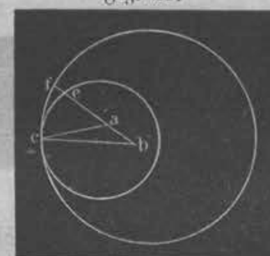


Fig. 25.



Beweis: Wenn sich die beiden Kreise um a und b in c von außen oder innen berühren, so liegt ihr Berührungspunkt in der Centrale oder deren Verlängerung. Denn gesetzt die Centrale ab ginge nicht durch den Berührungspunkt c, sondern durch die Punkte e und f, so ziehe man noch die Radien ac und cb, so wäre in Fig. 24 und 25

in Fig. 24 1. $ab > ae + fb$ oder $ab > ac + cb$
und in Fig. 25 2. $fb > ab + ae$ oder $cb > ab + ac$ (gegen I. §. 4).

§. 26.

Zeichnung eines Dreiecks aus 3 Linien.

Wenn zur Zeichnung eines Dreiecks 3 Linien m, n, o, von denen 2 größer als die dritte, gegeben sind, so zeichne man eine Linie ab gleich der einen gegebenen Linie, etwa $ab = m$, beschreibe aus ihren Endpunkten a und b Kreise mit e und o, die sich in zwei Punkten schneiden und ziehe von einem Durchschnittspunkte c nach a und b Linien, so ist das entstandene Dreieck aus den 3 Linien gebildet, denn $ab = m$, $ac = n$ und $bc = o$ als Radien in einem Kreise.

§. 27.

Zwei Kreise aus zwei gegebenen Punkten zu beschreiben, die sich von außen berühren.

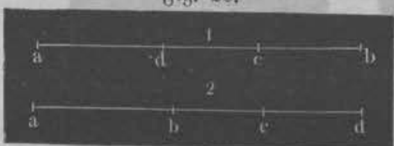
Sollen aus den beiden Endpunkten a und b zwei Kreise beschrieben werden, die sich von außen berühren, so nehme man auf der Verbindungslinie ab einen Punkt und beschreibe aus beiden gegebenen Punkten durch ihn Kreise, so sind dies die verlangten nach §. 24.

§. 28.

Zwei Kreise aus 2 Punkten zu beschreiben, die sich durchschneiden.

Sollen aus den beiden Punkten a und b Kreise beschrieben werden, die sich in 2 Punkten durchschneiden, so nehme man auf der Verbindungslinie ab oder deren Verlängerung 2 Punkte c und d (Fig. 26, 1 und 2) und beschreibe mit ac aus a und mit bd aus b Kreise, so werden sich diese in 2 Punkten schneiden nach §. 24.

Fig. 26.



Bemerkung. Die 3 gelösten Aufgaben der vorigen Paragraphen, vom Lehrer mündlich noch näher besprochen, werden genügen, den Schüler in den Stand zu setzen, die Aufgaben des folgenden Paragraphen erst mündlich und dann schriftlich mit Leichtigkeit zu lösen. Bei der mündlichen Lösung achte der Lehrer auf bündigen und correcten Ausdruck, und bei der schriftlichen Darstellung noch außerdem auf eine saubere Schrift und genaue Zeichnung, damit der Schüler durch den Unterricht schon in den ersten Anfängen für die viel strengeren Anforderungen bei späteren praktischen Berufsarbeiten eingeschult werde. —

§. 29.

Aufgaben.

Einen Kreis zu beschreiben. — Von einem gegebenen Punkte aus einen Kreis mit gegebenem Halbmesser zu beschreiben. — Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis von innen berührt. — Ein gleichseitiges Dreieck über einer gegebenen Linie zu beschreiben. Ein gleichschenkliges Dreieck aus Basis und Schenkel zu beschreiben und zwar a. über der Basis, b. über dem Schenkel u. s. w.

§. 30.

Uebergang.

Nachdem wir die geradlinigen und krummlinigen Constructionen im Allgemeinen, die einfachste gerad- und krummlinige Construction, das Dreieck und den Kreis, ihrer Entstehung und Grundeigenschaft nach im Besondern betrachtet haben, wenden wir uns nun zuerst specieller zu den einzelnen Arten der geradlinigen Constructionen, um nicht nur die Bedingungen ihrer vollkommenen Bestimmtheit (Congruenz), sondern auch ihrer Größen- und Gestaltbestimmtheit (Gleichheit, Aehnlichkeit) und die daraus sich ergebenden Folgerungen kennen zu lernen. —

Vierter Abschnitt.

Von der vollkommnen Bestimmung des Dreiecks oder der Congruenz der Dreiecke.

§. 1.

Bestimmungsstücke eines Dreiecks.

Ein Dreieck hat außer seiner Fläche noch sechs andere Stücke, die nur zum Theil unabhängig von einander sind. Diejenigen Stücke, die ein Dreieck vollkommen bestimmen, so daß alle mit ihnen gezeichneten Dreiecke sich nur durch ihre Lage, nicht aber durch Größe und Gestalt von einander unterscheiden, heißen Bestimmungsstücke des Dreiecks. Wie viele und welche Stücke ein Dreieck bestimmen, das lehren die Congruenzsätze der folgenden Paragraphen.

§. 2.

Congruenzerklärung.

Congruent heißen 2 Dreiecke oder Figuren überhaupt, wenn sie so aufeinandergelegt werden können, daß sie in allen Punkten ihrer Umfänge zusammenfallen oder sich decken (congruiren). Das Zeichen der Congruenz ist $\cong$ oder $\overline{\cong}$ z. B. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ heißt $\triangle ABC$ ist congruent $\triangle A'B'C'$.

§. 3.

Folgerungen aus der Congruenz.

Wenn 2 Figuren congruent sind, so sind alle sich deckenden Stücke einander gleich. Die Congruenz der Figuren dient demnach zunächst dazu, die Gleichheit von Linien und Winkeln nachzuweisen, wenn man im Stande ist, sie in Figuren, deren Congruenz sich erweisen läßt, als Seiten und Winkel anzubringen. Außerdem aber werden die Congruenzsätze auch gebraucht, um Eigenschaften und Größenverhältnisse von Linien und Winkeln bestimmter Dreiecke zu entdecken.

§. 4.

Anzahl der Bestimmungsstücke.

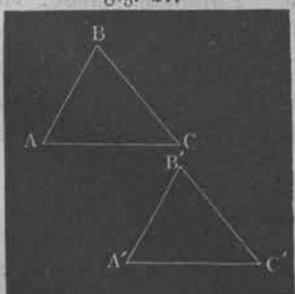
Zwei Dreiecke sind nicht congruent, wenn sie 1 oder 2 gleiche Stücke haben, weil sich mit ihnen unzählige verschiedene Dreiecke zeichnen lassen. Selbst 3 Stücke bestimmen ein Dreieck noch nicht, wenn es 3 Winkel sind, da der dritte Winkel schon durch die beiden andern bestimmt ist (III. §. 13) und sich durch parallele Linien mit einer Seite eines Dreiecks unzählige verschiedene Dreiecke mit 3 gleichen Winkeln zeichnen lassen. Welche 3 Stücke ein Dreieck bestimmen, lehren die nächsten fünf Congruenzsätze. —

§. 5.

Erster Congruenzsatz.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich sind (Fig. 27).

Fig. 27.



Wenn in den beiden Dreiecken

$$\begin{gathered} ABC \text{ und } A'B'C' \\ AC = A'C' \\ A = A' \\ C = C' \\ \hline \text{so ist } \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \\ AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ C = C' \end{gathered}$$

Beweis: Denn legt man das Dreieck ABC so auf das Dreieck $A'B'C'$, daß A auf A' und AC auf $A'C'$ zu liegen kommt, so fällt

1. C auf C', weil $AC = A'C'$
2. AB in $A'B'$, weil $A = A'$
3. CB in $C'B'$, weil $C = C'$ ist.

Da nun B sowohl in $B'C'$ als in $A'B'$, also in dem Durchschnittspunkte B' liegen muß, so decken sich die Dreiecke und alle übrigen gleichliegenden Stücke sind gleich. —

Ein Dreieck ist demnach vollkommen durch eine Seite und zwei anliegende Winkel bestimmt.

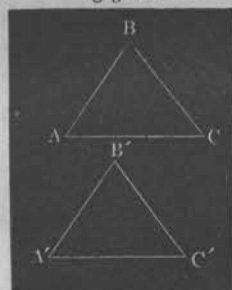
Bemerkung. Der Lehrer benutze diesen ersten Congruenzbeweis, um den Schüler auf die Eigenthümlichkeiten der Beweisführung und ihre Form hinzuweisen.

§. 6.

Zweiter Congruenzsatz.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen eine Seite, ein anliegender und der Gegenwinkel gleich sind (Fig. 28).

Fig. 28.



Wenn in den beiden Dreiecken

$$\begin{gathered} ABC \text{ und } A'B'C' \\ AC = A'C' \\ A = A' \\ B = B, \\ \hline \text{so ist } \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \\ AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ C = C' \end{gathered}$$

Beweis: Denn da die beiden Dreiecke 2 gleiche Winkel haben, so ist auch $C = C'$ und daher die Dreiecke nach §. 5 congruent. Ein Dreieck ist demnach durch eine Seite und zwei Winkel bestimmt.

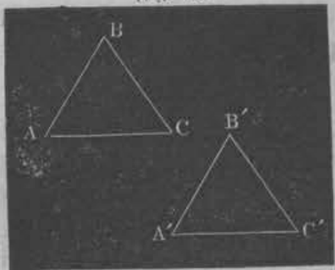
Bemerkung. Beide Sätze können auch unter den allgemeinen Satz zusammengefaßt werden: Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und zwei gleichliegende Winkel in ihnen gleich sind.

§. 7.

Dritter Congruenzsatz.

Zwei Dreicke sind congruent, wenn in ihnen 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind.

Fig. 29.



Wenn in den Dreiecken

ABC und $A'B'C'$

$AC = A'C'$

$AB = A'B'$

$A = A'$

so ist $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

$BC = B'C'$

$B = B'$

$C = C'$

Beweis: Denn legt man das Dreieck ABC so auf $A'B'C'$, daß A auf A' und AC in $A'C'$ zu liegen kommt, so fällt

1. C auf C', weil $AC = A'C'$
2. AB auf $A'B'$, weil $A = A'$
3. B auf B', weil $AB = A'B'$ ist.

Da nun zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie möglich ist, so fällt auch BC auf $B'C'$, die Dreiecke decken sich und alle übrigen gleichliegenden Stücke sind gleich.

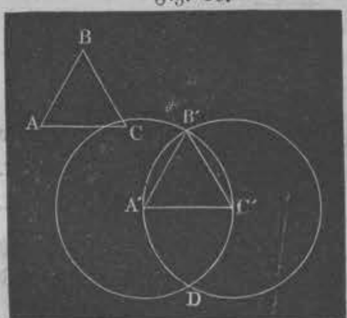
Demnach ist ein Dreieck durch 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel vollkommen bestimmt.

§. 8.

Vierter Congruenzsatz.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen die 3 Seiten gleich sind.

Fig. 30.



Wenn in den Dreiecken

ABC und $A'B'C'$

$AB = A'B'$

$AC = A'C'$

$BC = B'C'$

so ist $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

$A = A'$

$B = B'$

$C = C'$

Beweis: Man construire aus den Endpunkten A' und C' der Linie $A'C'$ Kreise mit den benachbarten Seiten $A'B'$ und $C'B'$, die sich in zwei Punkten B' und D schneiden (III. §. 28). Legt man nun das Dreieck ABC so auf das $\triangle A'B'C'$, daß A in A' und AC in $A'C'$ fällt, so fällt

1. C in C', weil $AC = A'C'$

2. B als Endpunkt von AB in die Peripherie des mit $A'B'$ um A' beschriebenen Kreises, weil $AB = A'B'$ und zugleich
3. B als Endpunkt von BC in die Peripherie des mit $B'C'$ um C' beschriebenen Kreises, weil $BC = B'C'$ ist.

Daher fällt B in beide Peripherien zugleich, d. h. in einen Durchschnittspunkt, also entweder in B' oder in D. Da nun das Dreieck oberhalb $A'C'$ gelegt ist, so fällt B auf B', die Dreiecke decken sich und alle übrigen gleichliegenden Stücke sind gleich.

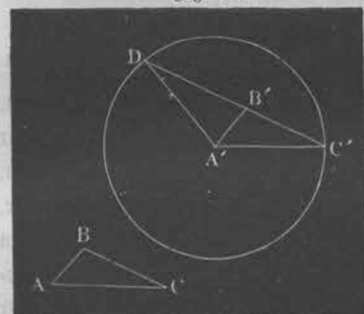
Demnach ist ein Dreieck durch 3 Seiten vollkommen bestimmt.

§. 9.

Fünfter Congruenzsatz.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen 2 Seiten und der Gegenwinkel der größeren gleich sind.

Fig. 31.



Wenn in den Dreiecken

ABC und $A'B'C'$

$AC = A'C'$ $(AC > AB$

$AB = A'B'$ $(A'C' > A'B'$

$B = B'$

so ist $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

$A = A'$

$C = C'$

$BC = B'C'$

Beweis: Man construire aus dem Endpunkte A' der größern Linie $A'C'$ mit ihr einen Kreis, so liegt B' innerhalb desselben (III. §. 20). Verlängert man nun $B'C'$ über B' hinaus, so wird die Verlängerung den Kreis in D schneiden. Legt man nun das Dreieck ABC so auf das Dreieck $A'B'C'$, daß A auf A' und AB in $A'B'$ fällt, so fällt

1. B in B', da $AB = A'B'$
2. BC in $B'C'$, da $B = B'$ ist. Der Punkt C als Endpunkt von BC und AC muß aber sowohl in $B'C'$, als in die Peripherie des mit $A'C'$ um A' beschriebenen Kreises fallen, d. h. in einen Durchschnittspunkt D oder C' beider Linien.

Da man nun das Dreieck rechts von $A'B'$ gelegt hat, so kann kein Punkt von ihm links von $A'B'$ fallen, die Punkte C und C' decken sich, ebenso die Linien AC und $A'C'$, sowie BC und $B'C'$ (I. §. 4), die Dreiecke sind congruent und alle gleichliegenden Stücke gleich.

Demnach ist ein Dreieck durch 2 Seiten und den Gegenwinkel der größern vollkommen bestimmt.

Bemerkung. 1. Dagegen ist ein Dreieck durch zwei Seiten und den Gegenwinkel der kleineren nur unvollkommen bestimmt, wie wir später sehen werden. — Zur Uebung kann der Schüler versuchen, die Nichtcongruenz aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleineren ebenso zu beweisen, wie die Congruenz im Paragraphen aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren bewiesen ist. — 2. Den Lehrsatz des Paragraphen findet man in anderen Lehrbüchern auch so ausgesprochen: „Zwei Dreiecke sind congruent, wenn 2 Seiten und 1 Gegenwinkel gleich und die beiden anderen Gegenwinkel gleichartig (beide stumpf oder beide spitz) sind.“ Oder: „Zwei Dreiecke sind congruent, wenn 2 Seiten und 1 Gegenwinkel gleich und die Summe der anderen Gegenwinkel ungleich 2 Rechten ist.“ —

Alle 3 Ausdrucksweisen drücken denselben Satz und dieselben Bedingungen aus. Denn 2 spitze oder 2 stumpfe Winkel zusammen sind ungleich 2 Rechten und die Gegenwinkel der kleineren Seiten müssen nothwendig spitze Winkel, also gleichartige Winkel und ungleich 2 Rechten sein.

§. 10.

Betrachtung des Beweisverfahrens in den Congruenzsätzen.

Die Beweisführung in den Congruenzsätzen besteht im Wesentlichen darin, daß man die Dreiecke mit den als gleich angenommenen Stücken aufeinander legt, um die Deckung der als nicht gleich angenommenen Stücke nachzuweisen. Diese Nachweisung erfolgt im ersten und dritten Congruenzsatze unmittelbar, im zweiten durch Zurückführung auf den ersten und im vierten und fünften durch eine Hilfsconstruction. In anderen Lehrbüchern findet man andere Beweise. Namentlich wird der fünfte Satz häufig indirect bewiesen und der vierte auf den dritten durch Anwendung des Satzes über die Winkel an der Basis des gleichschenkligen Dreiecks zurückgeführt. — Sollen sämmtliche fünf Sätze, ohne durch andere Sätze getrennt zu sein, unmittelbar aufeinander folgen, so möchte sich schwerlich ein bequemeres Beweisverfahren finden.

§. 11.

Zusammenhang der Congruenzsätze.

Wenn man die Congruenzsätze so ausspricht, wie es in den Paragraphen geschehen ist, so scheinen sie auf den ersten Blick in keiner nähern Verbindung miteinander zu stehen. Wenn man sie aber so ausspricht:

1. Wenn eine Seite und 2 einschließende Winkel gleich sind, so sind auch 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich.

2. Wenn 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind, so ist auch eine Seite und die beiden einschließenden Winkel gleich.

3. Wenn eine Seite und ein anliegender und ein Gegenwinkel gleich sind, so sind auch 2 Seiten und ein Gegenwinkel gleich.

4. Wenn 3 Seiten gleich sind, so sind auch die 3 Winkel gleich.

5. Wenn 2 Seiten und ein Gegenwinkel gleich sind, so sind auch eine Seite, ein Gegenwinkel und ein ihr anliegender Winkel gleich, so sieht man leicht, daß 2 und 5 die Umkehrungen von 1 und 3 sind, und daß die Umkehrung von 4 ausfällt, da ein Dreieck nicht durch 3 Winkel bestimmt ist. In der Stereometrie gilt bei den Congruenzsätzen über das körperliche Dreieck auch die Umkehrung zu 4, da die 3 Winkel einer körperlichen Ecke 3 voneinander unabhängige Stücke sind.

§. 12.

Gibt es noch andere Congruenzsätze?

Außer den 5 bewiesenen Congruenzen gibt es keine andere, wenn man nur Seiten und Winkel einzeln gleich setzt. Sobald man aber Summen und Differenzen derselben ebenfalls als Bestimmungsstücke betrachtet oder andere Linien, wie Perpendikel, Transversalen, Halbirungslinien der Winkel u. s. w. zur Vergleichung heranzieht, so lassen sich noch eine sehr große Menge neuer Congruenzsätze aufstellen, die jedoch alle auf die oben bewiesenen zurückgeführt, und darum nicht als Congruenzsätze aufgestellt, sondern als Aufgaben behandelt werden.

Bemerkung. Der gewandtere Schüler kann sich an der Beweisführung folgender Congruenzen üben: Zwei Dreiecke sind congruent, wenn Grundlinie, Höhe und eine Seite gleich sind. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn Grundlinie, Höhe und ein Winkel an der Grundlinie gleich sind. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn die Summe ihrer drei Seiten und 2 gleichliegende Winkel gleich sind u. s. w.

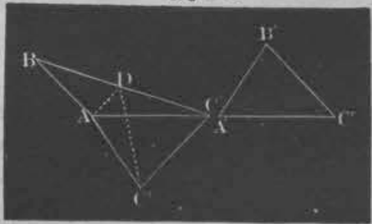
Lehrsätze, welche mit Hilfe der Congruenzsätze bewiesen werden.

§. 13.

Ungleichheit der dritten Seiten in 2 Dreiecken.

Wenn in 2 Dreiecken 2 Seiten gleich, die davon eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so hat dasjenige Dreieck die größere dritte Seite, welches den größern eingeschlossenen Winkel hat.

Fig. 32.



Beweis: Wenn in den Dreiecken

ABC und $A'B'C'$

$AB = A'B'$

$AC = A'C'$

$\angle BAC > \angle B'A'C'$

so ist $BC > B'C'$.

Denn bringt man das Dreieck $A'B'C'$ so unter ABC, daß $AC'' = A'B'$ und $CC'' = B'C'$ ist, halbirt den Winkel BAC'' durch die Linie AD und zieht DC'', so ist

$$\triangle BAD \cong \triangle ADC'' \text{ (§. 7)}$$

Daher $BD = DC''$

Da nun $DC'' + DC > CC''$

und $DC'' + DC = BC$ und $CC'' = B'C'$

so ist $BC > B'C'$

Bemerkung. Daß als Beweismittel die Halbirung eines Winkels gebraucht wird, ehe die geometrische Halbirung des Winkels gezeigt ist, wird Niemand für eine logische Sünde halten, der bedenkt, daß es hier sich nur im Allgemeinen um die denkbare gleiche oder ungleiche Theilung eines Winkels und deren Folgen handelt, nicht aber um die wirkliche geometrische Halbirung mit gerader Linie und Kreis. 2. In den älteren Lehrbüchern wurde das Hilfsdreieck ACC'' immer oberhalb AC construirt und dadurch ein Beweis für 3 verschiedene Fälle nach Verschiedenheit der Lage des Punktes B in Bezug auf die Linie BC nöthig. Eine ähnliche Vereinfachung des Beweises liefert der Cauchy'sche Beweis für den elementaren stereometrischen Satz, daß eine Linie perpendikular auf einer Ebene ist, wenn sie auf zwei sich durchschneidenden Linien in derselben perpendikular ist.

§. 14.

Umkehrung des vorigen Satzes.

Wenn in 2 Dreiecken 2 Seiten gleich, die dritten Seiten aber ungleich sind, so hat das Dreieck den größern eingeschlossenen Winkel, welches die größere dritte Seite hat.

Wenn in den Dreiecken ABC und $A'B'C'$

$AB = A'B'$

$AC = A'C'$

$BC > B'C'$

so ist $A > A'$

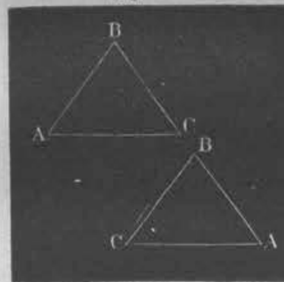
Denn da bei den beiden anderen Annahmen, daß $A = A'$ oder $A < A'$, ein Widerspruch gegen die Voraussetzung und gegen §. 7 oder §. 13 entstehen würde, so bleibt die Behauptung des Satzes allein als wahr übrig.

§. 15.

Gegenseitige Abhängigkeit der Seiten und Winkel in einem Dreieck.

A. Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber, oder: Im gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Basis gleich.

Fig. 33.



Wenn im $\triangle ABC$ $AB = BC$

so ist $A = C$.

Beweis: Denn denkt man sich das Dreieck ABC in entgegengesetzter Lage gezeichnet wie in Fig. 33, so ist $\triangle ABC \cong \triangle CAB$ (§. 8) und daher $A = C$.

B. Gleichen Winkeln liegen gleiche Seiten gegenüber.

Wenn in dem Dreieck ABC, $A = C$

so ist $AB = BC$.

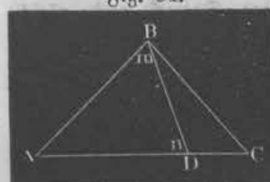
Beweis: Denn denkt man sich das Dreieck ABC in entgegengesetzter Lage über AC gezeichnet wie in Fig. 33,

so ist $\triangle ABC \cong \triangle ABC$

und daher $AB = BC$.

C. Der größern Seite liegt der größere Winkel gegenüber.

Fig. 34.



Wenn im Dreieck ABC, $AC > AB$

so ist $B > C$.

Beweis: Denn schneidet man die kleinere Seite AB auf der größeren AC ab von ihrem gemeinschaftlichen Punkte A aus oder macht $AD = AB$ und zieht BD,

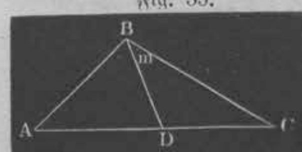
so ist $m = n$ (A). Da nun $n > C$,

so ist auch $m > C$

und daher um so mehr $B > C$.

D. Dem größern Winkel liegt die größere Seite gegenüber.

Fig. 35.



Wenn in dem Dreieck ABC, $B > C$

so ist $AC > AB$

Beweis: Denn schneidet man den kleinern Winkel C auf dem größeren B ab von ihrem gemeinschaftlichen Schenkel BC aus oder macht man $m = C$ und zieht BD, so ist $BD = DC$ (B).

Da nun $AC = AD + DC = AD + BD$ ist
aber $AD + BD > AB$ (III. §. 7)
so ist $AC > AB$.

Bemerkung. 1. Die Beweise zu A und B werden auch durch Hilfsconstructionen geführt, entweder durch das Abschneiden gleicher Stücke auf den Schenkeln oder durch das Halbiren der Grundlinie oder des Winkels an der Spitze. Bei den Repetitionen mögen die anderen Beweise dem Schüler mitgetheilt werden, um ihn auf die Unterschiede im Beweisverfahren hinzuweisen. Der Beweis zu D wird gewöhnlich indirect geführt; Verfasser hält den directen Beweis für passender, um den Schüler auf die Analogie in den Beweisen zu C und D hinweisen zu können. 2. Der Paragraph hat uns mit der Abhängigkeit der Seiten und ihrer Gegenwinkel im Allgemeinen bekannt gemacht, ohne uns den bestimmten Ausdruck für dies Größenverhältniß zu geben. Denn daß Seiten und Gegenwinkel nicht in gleichem Verhältniß zu einander stehen, lehrt das Verhältniß von Seiten und Gegenwinkeln in einem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck. Erst die Trigonometrie füllt diese Lücke in der Geometrie aus und macht uns auch mit dem bestimmten Ausdrucke für dieses Größenverhältniß bekannt, indem sie lehrt, daß die Seiten sich wie die Sinus ihrer Gegenwinkel verhalten.

§. 16.

Gleichseitiges und gleichwinkliges Dreieck.

Aus §. 15 A. folgt 1., daß jedes gleichseitige Dreieck auch gleichwinklig ist und aus §. 15 B. 2., daß jedes gleichwinklige Dreieck auch gleichseitig ist und aus §. 15 A. und III. §. 11 3., daß jeder Winkel des gleichseitigen Dreiecks $= \frac{2R}{3} = \frac{180^0}{3} = 60^0$ ist.

Fragen: Wie groß ist der Außenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks? Wie verhalten sich die 3 Perpendikel aus den Winkelspitzen auf ihre Gegenseiten?

§. 17.

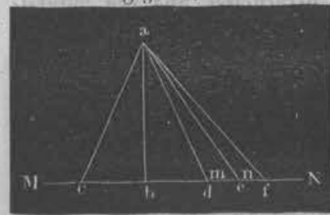
Größenverhältniß der Linien, die von einem Punkte aus nach einer Linie gezogen werden können.

Von einem Punkte aus können an eine Linie unzählige Linien gezogen werden, von diesen ist:

1. das Perpendikel die kürzeste Linie und sie heißt daher auch die Entfernung des Punktes von der Linie,

2. gleichweit vom Perpendikel entfernte Linien sind gleich lang,
3. die weiter vom Perpendikel entfernten sind auch die längern.

Fig. 36.



Wenn vom Punkte a nach MN, ab, ac, ad, ae, af u. s. w. gezogen sind und $ab \perp MN$, $cb = bd$, $be > bd$ und $bf > be$
so ist 1. ab die kürzeste Linie,
2. $ac = ad$
3. $ae > ad$ u. s. w.

Denn in den rechtwinkligen Dreiecken abd, abe, abf, ist $ad > ab$; $ae > ab$; $af > ab$ (§. 15 D.) u. s. w.

Daher 1. ab die kürzeste Linie.

In den beiden rechtwinkligen Dreiecken abc und abd sind 2 Seiten und ein Winkel gleich,

daher nach §. 7 auch 2. $ac = ad$.

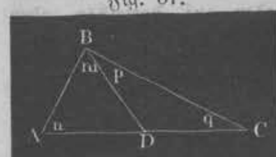
In den Dreiecken abc, abf u. s. w. sind m und n immer größer werdende stumpfe Winkel und

daher 3. $ae > ad$; $af > ae$ (§. 15 D.) u. s. w. —

§. 18.

Wenn in einem Dreiecke die Hälfte der größten Seite der Verbindungslinie ihres Halbirungspunktes mit der Spitze ihres Gegenwinkels gleich ist, so ist dieser Gegenwinkel ein Rechter und das Dreieck rechtwinklig.

Fig. 37.



Wenn im $\triangle ABC$, $AD = DC = BD$
so ist $\angle ABC = 1R$.

Beweis: Denn $m + n + p + q = 2R$ (III. §. 11).
Da nun $m = n$ und $p = q$ ist
so ist $2m + 2p = 2R$, oder
$m + p = R$ oder $\angle ABC = R$.

Bemerkung. Da sich unter der Voraussetzung des Paragraphen aus D jedes Mal durch A, B, C, ein Halbkreis beschreiben läßt, so kann der Satz auch so ausgesprochen werden: Jeder Winkel im Halbkreise ist ein Rechter.

§. 19.

Beziehungen von Linien im gleichschenkligen Dreieck.

A. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Perpendikel aus den Winkelspitzen an der Basis auf die Schenkel gefällt einander gleich (zum Beweise dient die Congruenz aus einer Seite und 2 Winkeln).

B. In jedem gleichschenkligen Dreiecke halbirt die Halbirungslinie des Winkels an der Spitze die Basis und das Dreieck und steht auf der Basis winkelrecht.

C. In jedem gleichschenkligen Dreiecke halbirt die Halbirungslinie der Basis auch den Winkel an der Spitze und das Dreieck und steht auf der Basis winkelrecht.

D. In jedem gleichschenkligen Dreiecke halbirt das Perpendikel aus der Spitze auf die Basis, die Basis, den Winkel an der Spitze und das Dreieck.

E. In jedem gleichschenkligen Dreieck geht das Perpendikel auf der Mitte der Basis errichtet durch die Spitze, halbirt den Winkel an der Spitze und das Dreieck.

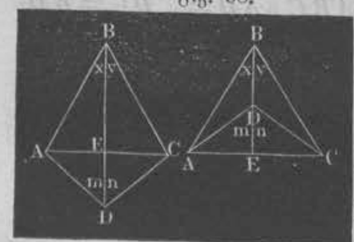
Bemerkung. Die Beweise liegen ganz einfach in den Congruenzsätzen für B in §. 7, für C in §. 8, für D in §. 9 und für E in I. §. 24 und §. 7.

§. 20.

Eigenschaften von 2 gleichschenkligen Dreiecken, die auf einer Basis errichtet sind.

Wenn man auf einer und derselben Basis AC zwei gleichschenklige Dreiecke entweder auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Basis errichtet, wie in Fig. 38, und ihre Spitzen durch eine gerade Linie verbindet, so halbirt diese oder ihre Verlängerung die Winkel an der Spitze, die Basis, die Dreiecke und steht winkelrecht auf der Basis.

Fig. 38.



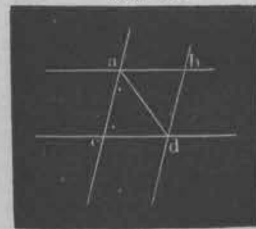
Andeutungen zur Beweisführung. Zuerst wird die Congruenz der Dreiecke ABD und DBC erwiesen, hieraus die Gleichheit der Winkel x und y und m und n unmittelbar oder mittelbar gefolgert, dann die Congruenz von ABE und BCE bewiesen und hieraus werden unmittelbar die anderen Behauptungen gefolgert.

§. 21.

Gleiche Entfernung der Parallelen.

Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

Fig. 39.



Wenn $ab \parallel cd$
$ac \parallel bd$
so ist $ab = cd$
und $ac = bd$.

Denn zieht man die Linie ad, so ist
$\triangle\, acd \cong \triangle\, adb$ (§. 5).
Daher $ab = cd$ und $ac = bd$.

Ueber die Gleichheit der Winkel a und d und b und c vergl. II. §. 11. Da Perpendikel zwischen Parallelen selbst parallel sind, so sind sie auch gleich und daher die Entfernungen paralleler Linien überall gleich.

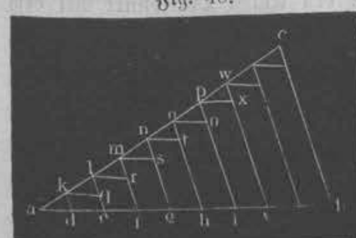
§. 22.

Gleiche Abschnitte eines Schenkels bedingen Gleichheit der Abschnitte des andern Schenkels.

Wenn man auf den Schenkeln eines Winkels beliebige, aber gleiche Stücke abschneidet und aus den Theilpunkten Parallelen (Transversalen) an den andern Schenkel zieht, so sind

1. die Abschnitte auf dem andern Schenkel auch unter sich gleich,
2. wachsen die Transversalen wie die Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. und haben also auch
3. dasselbe Verhältniß wie die Abschnitte auf den Schenkeln von der Spitze aus bis zu ihnen.

Fig. 40.



Wenn in beistehender Figur
$ad = de = ef = fg$ u. s. w. und
$kd \parallel le \parallel mf \parallel ng$ u. s. w. so ist

1. $ak = kl = lm = mn$ u. s. w.
2. $le = 2kd$; $mf = 3kd$; $ng = 4kd$ ꝛc.
3. $mf : pi = af : ai = am : ap$.

Denn denkt man sich durch die Theilpunkte k, l, m, n, o, p u. s. w. die Parallelen $kq \parallel lr \parallel ms \parallel nq \parallel ab$ gezogen, so ist $\triangle\, akd \cong \triangle\, klq \cong \triangle\, mns$ u. s. w. (1 S. u. 2 W.) daher

1. $ak = kl = lm$ u. s. w. und $kd = lq = mr$ u. s. w. und da $qd = qe$, $le = rf$, $mf = ag$ ist, so ist
2. $le = 2kd$, $mf = 3kd$ u. s. w. Da ferner

$$mf : pi = 3kd : 6kd = 3 : 6 \text{ ist und}$$
$$af : ai = 3ad : 6ad = 3 : 6 \text{ ist und}$$
$$am : ap = 3ak : 6ak = 3 : 6 \text{ ist, so ist}$$
$$\overline{mf : pi = af : ai = am : ap.}$$

Aufgaben, welche mit Hilfe der Congruenzsätze gelöst werden.

§. 23.

Theilung einer Linie.

A. Eine Linie zu halbiren. Soll eine Linie in 2 gleiche Theile getheilt werden, so beschreibe man über ihr 2 gleichschenklige Dreiecke, verbinde ihre Spitzen durch eine gerade Linie, so halbirt diese zugleich die gegebene Linie (§. 20).

B. Eine Linie in eine beliebige Menge gleicher Theile zu theilen. Soll eine Linie in n gleiche Theile getheilt werden, so verbinde man mit ihr unter einem beliebigen Winkel eine Linie von unbestimmter Länge, trage auf ihr n beliebige aber gleiche Theile ab, verbinde den letzten Theilpunkt mit dem Endpunkte der gegebenen Linie durch eine Linie und ziehe mit dieser durch sämmtliche Theilpunkte Parallelen, so ist dadurch auch die gegebene Linie in n gleiche Theile getheilt (§. 22).

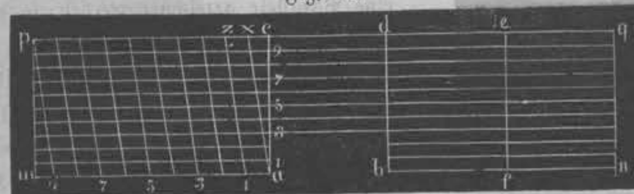
C. Jeden beliebigen Bruchtheil einer Linie zu finden. Soll $\frac{m}{n}$ einer Linie dargestellt werden, so trage man wie in B auf einer Linie von unbestimmter Länge n gleiche Theile ab, verbinde den letzten Theilpunkt mit dem Endpunkte der Linie durch eine Linie und ziehe mit ihr aus dem $m$ten Theilpunkte eine Parallele.

D. Jeden beliebigen Bruchtheil einer kleinen Linie zu zeichnen, ohne die Linie zu theilen. Sollen die $n$tel einer Linie ab gezeichnet werden, so verbinde man mit ihr unter einem (großen) spitzen Winkel eine andere Linie von unbestimmter Länge, trage

Fig. 41.

auf ihr vom Punkte a aus n gleiche Theile ab, verbinde den letzten Theilpunkt mit dem Punkte b durch eine gerade Linie und ziehe durch die Theilpunkte Parallelen mit ab, so ist $ef = \frac{1}{n}$; $gh = \frac{2}{n}$; $ik = \frac{3}{n}$ u. s. w. (§. 22)

Fig. 42.



Bemerkung. Ist ab einen Fuß lang und ac in 12 Theile getheilt, so ist ef einen Zoll, gn 2 Zoll u. s. w. Daher kann die Auflösung in D zur Anfertigung eines Transversalmaßstabes benutzt werden. Der Transversalmaßstab ist an dieser Stelle an Fig. 42 zu erklären und sein Gebrauch einzuüben.

§. 24.

Abtragung und Theilung eines Winkels.

A. Einen gegebenen Winkel abzutragen. Soll ein Winkel an einem Punkte einer gegebenen Linie in vorgeschriebener Richtung abgetragen werden, so ergänze man den Winkel zu einem (am besten) gleichschenkligen Dreiecke und zeichne von dem gegebenen Punkte aus über der gegebenen Linie ein gleichschenkliges Dreieck aus denselben Stücken in vorgeschriebener Lage, so ist der am gegebenen Punkte entstandene Winkel der verlangte (§. 8).

B. Einen gegebenen Winkel zu halbiren. Soll ein Winkel halbirt werden, so ergänze man ihn zu einem gleichschenkligen Dreieck, beschreibe über der Basis noch ein gleichschenkliges Dreieck und verbinde ihre Spitzen durch eine gerade Linie, so halbirt diese auch den Winkel. (§. 20).

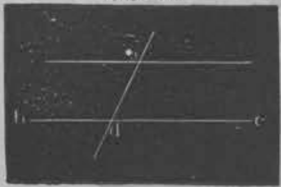
Bemerkung. Durch wiederholtes Halbiren kann man den Winkel in 2, 4, 8, $2n$ gleiche Theile theilen. Eine Theilung des Winkels in 3 gleiche Theile ist durch gerade Linie und Kreis nicht auszuführen; sie gehört zu den berüchtigten Aufgaben, deren elementare Lösung den alten Mathematikern so viele vergebliche Mühe gemacht hat.

§. 25.

Zeichnung einer Parallele.

Soll durch einen Punkt zu einer Linie bc eine Parallele gezeichnet werden, so ziehe man durch den Punkt a und die Linie irgend eine beliebige Linie, welche die gegebene Linie im Punkte d schneidet, zeichne an den gegebenen Punkt dieser Linie einen Winkel, der zu einem der Winkel bei *d* der Gegenwinkel oder Wechselwinkel und ihm gleich ist, so ist der andere Schenkel dieses Winkels die geforderte Parallele (II. §. 6).

Fig. 43.



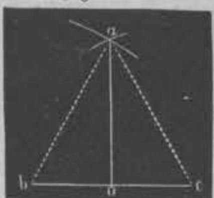
2. Soll durch einen Punkt zu einer Linie eine Parallele gezeichnet werden, so beschreibe man aus dem Punkte einen Kreis, der die gegebene Linie in 2 Punkten schneidet, beschreibe aus dem einen Durchschnittspunkte noch einen Kreis mit demselben Radius und aus dem gegebenen Punkte noch einen dritten Kreis mit dem Abschnitte der Linie, der den zweiten Kreis in einem Punkte schneidet. Ziehe man nun durch den gegebenen Punkt und diesen Durchschnittspunkt eine Linie, so ist dies die geforderte Parallele. Der Beweis liegt in der Congruenz von Dreiecken und der Gleichheit der Wechselwinkel.

§. 26.

Zeichnung eines Perpendikels.

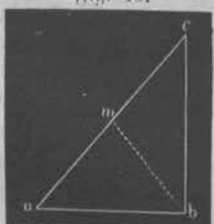
1. Soll ein Perpendikel in einem Punkte einer Linie errichtet werden, so schneide man auf beiden Seiten des gegebenen Punktes auf der Linie gleiche Stücke ab, construire über dieser Strecke ein gleichschenkliges Dreieck und verbinde seine Spitze mit dem gegebenen Punkte durch eine Linie, so ist diese das Perpendikel (§. 17).

Fig. 44.



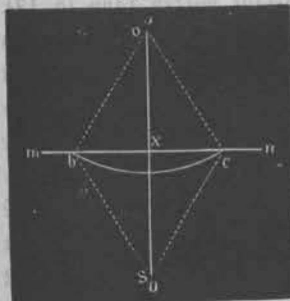
2. Soll ein Perpendikel im Endpunkte einer Linie errichtet werden, ohne daß es gestattet ist, die Linie zu verlängern, so errichte man über einer beliebigen Strecke vom gegebenen Endpunkte aus ein gleichschenkliges Dreieck, verlängere den nicht an den Endpunkt stoßenden Schenkel über die Spitze hinaus um seine eigene Länge und ziehe von diesem Punkte der Verlängerung an den gegebenen Punkt eine Linie, so ist sie das verlangte Perpendikel (§. 18).

Fig. 45.



3. Soll vom Punkte außerhalb einer Linie ein Perpendikel auf dieselbe gefällt werden, so beschreibe man aus dem Punkte einen Kreis, der die gegebene Linie in 2 Punkten schneidet, über der abgeschnittenen Sehne als Basis beschreibe man ein gleichschenkliges Dreieck und verbinde seine Spitze mit dem gegebenen Punkte durch eine Linie, so ist sie das verlangte Perpendikel (§. 20).

Fig. 46.



§. 27.

Zeichnung von Dreiecken aus gegebenen Stücken.

A. Zeichnung eines Dreiecks aus 3 Seiten.

B. Zeichnung eines Dreiecks aus 2 Seiten und dem Gegenwinkel der größern Seite.

C. Zeichnung eines Dreiecks aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

D. Zeichnung eines Dreiecks aus einer Seite und 2 anliegenden Winkeln.

Bemerkung. Sämmtliche geforderte Zeichnungen sind so leicht, daß sie weiter keiner Beschreibung und Anleitung bedürfen.

Der Beweis hat nachzuweisen, daß die gezeichnete Figur wirklich die gegebenen Stücke enthält.

E. Zeichnung eines Dreiecks aus einer Seite, einem anliegenden und dem Gegenwinkel.

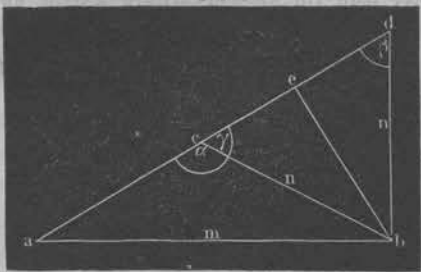
Soll aus einer Linie, einem anliegenden und dem Gegenwinkel ein Dreieck gezeichnet werden, so zeichne man erst eine Linie gleich der gegebenen, trage an ihrem einen Endpunkt den anliegenden Winkel mit unbestimmtem Schenkel an, außerdem an diesen Schenkel und an den Endpunkt den Gegenwinkel und ziehe durch den andern Endpunkt der Grundlinie mit diesem Schenkel eine Parallele bis zum Durchschnittspunkte mit dem Schenkel des anliegenden Winkels, so ist das Dreieck das verlangte. (Der Beweis liegt in der Construction selbst und in der Gleichheit der Gegenwinkel bei parallelen Linien.)

F. Zeichnung eines Dreiecks aus 2 Seiten und dem Gegenwinkel der kleinern Seite.

Soll ein Dreieck aus 2 Seiten und dem Gegenwinkel der kleinern Seite gezeichnet werden, so muß der gegebene Winkel nothwendig spitz sein (§. 15 C.).

Aber selbst wenn der gegebene Winkel spitz ist, so wird sich dennoch kein Dreieck aus den gegebenen Stücken bilden lassen, falls die kleinere Linie kürzer ist, als das Perpendikel, welches aus dem Endpunkte der größern Linie auf den andern Schenkel des gegebenen Winkels gefällt werden kann (§. 17).

Fig. 47.



Ist die kleinere Linie diesem Perpendikel gleich, so entsteht nur ein und zwar ein rechtwinkliges Dreieck. Ist die kleinere Linie n größer als das Perpendikel eb (aber kleiner als die größere Linie wie in beistehender Figur), so sind 2, aber nur 2 verschiedene Dreiecke abc und abd möglich, weil vom Punkte b aus nur 2 Linien bc und $bd = n$ an die Linie ad gezogen werden können (§. 17). Ihre Winkel α und β ergänzen sich zu 2 Rechten. Warum?

Uebungen in der Beweisführung und Construction.

1. Wenn man den einen Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks über die Spitze hinaus verlängert und den so entstandenen Außenwinkel halbirt, so ist die Halbirungslinie der Basis parallel.

2. Zwei gleichseitige Dreiecke sind congruent, wenn die Höhenperpendikel gleich sind.

3. Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck einer der Winkel gleich $^2/_3$ Rechten ist, so ist das Dreieck gleichseitig.

4. Theilt man die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks in drei gleiche Theile und verbindet die in einer Winkelspitze zunächst liegenden durch gerade Linien, so entsteht ein reguläres Sechseck, d. h. ein Sechseck, in dem alle Seiten und Winkel gleich sind.

Fünfter Abschnitt.

Von der vollkommenen Bestimmung der Vierecke und Parallelogramme.

§. 1.

Vierecke und ihre Diagonalen.

Vierecke heißen alle von 4 geraden Linien als Seiten begrenzten ebenen Figuren, und diejenigen Linien in ihnen, welche zwei nicht benachbarte Winkelspitzen verbinden, heißen Diagonalen. — Was bedeutet das Wort Diagonale? Wie viele Diagonalen gibt es im Vierecke? Warum hat das Dreieck keine Diagonalen?

Bemerkung. Da die Figuren und Beweise zu den folgenden Sätzen meist sehr einfach sind und sich auf die Congruenzsätze stützen, so sind die Figuren gar nicht gezeichnet und die Beweise nur angedeutet, um dem Lehrer freie Hand zu lassen, nach der Fassungskraft seiner Schüler das Einzelne kürzer oder ausführlicher zu veranschaulichen und zu erörtern.

§. 2.

Größe der vier Winkel eines Viereckes.

Die vier Winkel eines jeden Vierecks betragen 4 Rechte.

Beweis: Zieht man eine Diagonale des Vierecks, so zerfällt dasselbe dadurch in 2 Dreiecke. Da nun die 6 Winkel der beiden Dreiecke 4 Rechte betragen und zugleich die 4 Winkel des Vierecks sind, so betragen auch die Winkel des Vierecks 4 Rechte. Wie viele convexe, stumpfe, rechte, spitze Winkel kann ein Viereck höchstens haben? Wie liegen die Diagonalen bei einem Viereck mit einem convexen Winkel? Wann erscheint ein Viereck als eine Summe und wann als die Differenz zweier Dreiecke?

§. 3.

Eintheilung der Vierecke.

Die Vierecke zerfallen nach der Richtung ihrer Gegenseiten in Vierecke mit parallelen oder nichtparallelen Gegenseiten. Die letzteren heißen Trapezoide. Die ersteren haben entweder ein oder zwei Paar parallele Gegenseiten und heißen Trapeze und Parallelogramme. —

Warum werden die Vierecke nicht wie die Dreiecke nach Seiten und Winkeln eingetheilt? Wie liegen Seiten und Winkel in einem Dreiecke und wie in einem Vierecke?

§. 4.

Erklärung des Parallelogrammes.

Jedes Viereck mit zwei Paar parallelen Gegenseiten ist ein Parallelogramm.

§. 5.

Eigenschaften des Parallelogrammes.

a. Zwei benachbarte Winkel ergänzen sich zu zwei Rechten. Warum?
b. Die Gegenwinkel sind gleich. Warum?
c. Die Gegenseiten sind gleich. Warum? Vergl. III. 21.
d. Jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente entgegengesetzt liegende Dreiecke.
e. Beide Diagonalen halbiren sich gegenseitig.

§. 6.

Mittelpunkt des Parallelogrammes und seine Eigenschaften.

Der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen in einem Parallelogramme heißt der Mittelpunkt desselben. Er hat folgende Eigenschaften:

a. Jede durch ihn gezogene Linie wird durch ihn halbirt. Warum?
b. Jede durch ihn gezogene Linie halbirt das Parallelogramm und theilt es in zwei congruente Trapeze.

§. 7.

Umkehrungen der Sätze über die Eigenschaften des Parallelogramms.

a. Jedes Viereck, in dem sich je zwei von drei auf einander folgenden Winkeln zu zwei Rechten ergänzen, ist ein Parallelogramm. Warum?

b. Jedes Viereck, dessen beide Paar Gegenwinkel gleich sind, ist ein Parallelogramm. Warum?

c. Jedes Viereck, dessen beide Paar Gegenseiten gleich sind, ist ein Parallelogramm. Warum?

d. Jedes Viereck, in dem ein Paar Gegenseiten gleich und parallel, ist ein Parallelogramm. Warum?

e. Jedes Viereck, in dem sich beide Diagonalen gegenseitig halbiren, ist ein Parallelogramm. Warum?

Ist jedes Viereck ein Parallelogramm, das aus zwei congruenten Dreiecken besteht? Warum nicht?

§. 8.

Bestimmung des Parallelogrammes.

a. Alle Winkel eines Parallelogrammes sind durch einen bestimmt. Warum? Wann sind alle Winkel eines Parallelogrammes Rechte?

b. Alle Seiten eines Parallelogrammes sind durch zwei benachbarte Seiten bestimmt. Warum? Wann sind alle Seiten eines Parallelogrammes gleich?

c. Jedes Parallelogramm ist wie jedes Dreieck durch drei Stücke bestimmt. Warum?

§. 9.

Eintheilung der Parallelogramme.

Die Parallelogramme zerfallen nach der Beschaffenheit ihrer Winkel in schiefwinklige und rechtwinklige, nach Beschaffenheit der benachbarten Seiten in ungleichseitige und gleichseitige. Werden beide Eintheilungsgründe mit einander verbunden, so erhalten wir folgende vier Arten von Parallelogrammen:

Fig. 48.

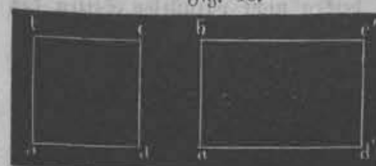
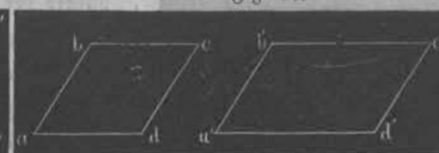


Fig. 49.



a. gleichseitig-rechtwinklige oder Quadrate.
b. gleichseitig-schiefwinklige oder Rhomben, Rauten.
c. ungleichseitig-rechtwinklige oder Rechtecke.
d. ungleichseitig-schiefwinklige oder Rhomboide.

§. 10.

Bestimmung der verschiedenen Arten der Parallelogramme.

Wodurch ist ein Quadrat, Rhombus, Rechteck, Rhomboid bestimmt? Wann sind 2 Quadrate, Rechtecke, Rhomben, Rhomboide congruent? Welche Eigenschaften haben die verschiedenen Arten der Parallelogramme? In welchen Parallelogrammen stehen die Diagonalen rechtwinklig auf einander, in welchen sind sie gleich?

§. 11.

Zeichnung eines bestimmten Parallelogrammes.

Soll ein Parallelogramm aus drei beliebig gegebenen und zu seiner Construction hinreichenden Stücken gezeichnet werden, so zeichne man aus ihnen ein Dreieck und ergänze dasselbe zu einem Parallelogramme mit Berücksichtigung der Eigenschaften des Parallelogrammes. —

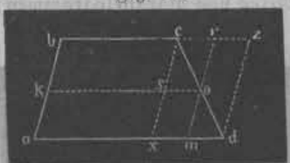
Wie wird ein Parallelogramm aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel gezeichnet? Wie wird ein Parallelogramm aus 2 benachbarten Seiten und der sie verbindenden Diagonale gezeichnet? Wie wird ein Parallelogramm aus 2 Diagonalen und einer Seite gezeichnet? Wie wird ein Parallelogramm aus einer Diagonale, einer Linie durch den Mittelpunkt und den durch sie gebildeten Winkel gezeichnet? u. s. w.

§. 12.

Eigenschaften des Trapezes und seiner Mittellinie.

a. In jedem Trapez ergänzen sich die beiden Winkel an den nicht parallelen Seiten zu zwei Rechten.

Fig. 50.



b. In jedem Trapez ist die Mittellinie, d. h. die Verbindungslinie, der Halbirungspunkte der beiden nicht parallelen Seiten den beiden parallelen Seiten parallel. Warum? Der Beweis kann leicht mit Hilfe einer Parallelen, die zu einer nicht parallelen Seite durch den Halbirungspunkt der anderen nicht parallelen Seite gezogen ist, geführt werden.

c. In jedem Trapeze ist die Mittellinie der halben Summe der beiden parallelen Seiten gleich.

Wie müssen die Umkehrungen dieser Sätze lauten?

§. 13.

Bestimmung und Zeichnung eines Trapezes.

Ein Trapez ist durch 4 Stücke bestimmt. Denn da ein Dreieck jedesmal durch 3 Stücke bestimmt ist, so ist ein Trapez, das sich in 2 Dreiecke zerlegen läßt, im Allgemeinen durch 4 Stücke bestimmt, da in dem zweiten Dreiecke schon 2 Stücke, die Diagonale und der eine Winkel, durch die Parallelität des einen Paares der Gegenseiten bestimmt ist. —

Soll ein Trapez aus vier zu seiner Bestimmung hinreichenden und gegebenen Stücken gezeichnet werden, so suche man erst aus 3 Stücken ein Dreieck zu zeichnen und dasselbe zu dem verlangten Trapeze zu ergänzen. —

Wie wird ein Trapez aus 3 Seiten und einem Winkel gezeichnet? Wie wird ein Trapez aus vier Seiten gezeichnet? u. s. w.

Bemerkung. Neuere Mathematiker nennen diejenigen Trapeze, deren Gegenwinkel sich zu 2 Rechten ergänzen, Antiparallelogramme. Warum? Welche Eigenschaften hat das Antiparallelogramm?

§. 14.

Bestimmung eines Trapezoides oder Viereckes im Allgemeinen.

Ein Trapezoid ist im Allgemeinen durch 5 unabhängige Stücke bestimmt. Denn da jedes Trapezoid sich durch eine Diagonale in 2 Dreiecke zerlegen läßt, und das eine Dreieck durch 3 Stücke bestimmt ist, so sind zur Bestimmung des andern Dreiecks, dessen eine Seite, die Diagonale des Vierecks, schon mitgegeben ist, nur noch 2 Stücke, also im Ganzen 5 Stücke erforderlich. Die Zeichnung des Trapezoides sucht man wie beim Trapeze und Parallelogramme auf die Zeichnung von Dreiecken zurückzuführen.

Bemerkung. Die verwickelteren Aufgaben über die Zeichnung von Parallelogrammen, Trapezen und Trapezoiden werden am besten am Ende des geometrischen Cursus in der geometrischen Analysis behandelt. Wie weit der Lehrer hier schon gehen kann, hängt von der individuellen Beschaffenheit seiner Schüler ab und läßt sich nicht im Allgemeinen bestimmen.

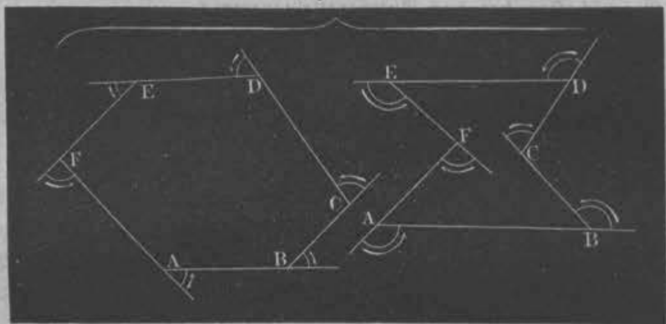
Sechster Abschnitt.

Von der vollkommenen Bestimmung der Vielecke.

§. 1.

Die vielseitigen Figuren von bestimmter Seitenzahl werden nach der ebenso großen Anzahl der Winkel oder Ecken Fünfecke, Sechsecke u. s. w. benannt. Ist die Anzahl (n) der Seiten unbestimmt, so heißen sie Vielecke, Polygone oder n-Ecke. Polygonwinkel heißt jeder innere, von 2 benachbarten Seiten gebildete Winkel. Außenwinkel entstehen wie beim Dreiecke durch Verlängerung der Seiten nach einer Richtung hin. Aeußere Winkel heißen die Ergänzungen der Polygonwinkel zu 4 Rechten. Welche Außenwinkel liegen innerhalb des Polygons? Was wird durch jeden einzelnen Außenwinkel und was durch alle zusammengenommen bezeichnet? Sind alle Außenwinkel immer durch Drehung nach derselben Richtung erzeugt, oder gibt es Fälle, in denen eine entgegengesetzte Drehung Statt findet? Diese und ähnliche Fragen werden sich leicht an nebenstehenden beiden Figuren veranschaulichen lassen.

Fig. 51.



§. 2.

Anzahl der Diagonalen eines Polygons.

a. In jedem nEck sind aus einer Winkelspitze $n-3$ Diagonalen möglich. Warum?

b. Die Anzahl sämmtlicher Diagonalen aus allen Winkelspitzen ist gleich $\left(\frac{n-3}{2}\right) n$.

Beweis: Aus jeder Winkelspitze sind nach a $(n-3)$ Diagonalen möglich, also aus allen Winkelspitzen $(n-3)\ n$. Da aber jede Diagonale in dieser Anzahl zweimal enthalten ist, so ist die Anzahl der Diagonalen

$$= \frac{(n-3)\ n}{2} = (n-3).\ \frac{n}{2} = \left(\frac{n-3}{2}\right).\ n$$

§. 3.

Zerlegung der Polygone in Dreiecke.

Jedes Polygon läßt sich durch Diagonalen in $(n-2)$ Dreiecke zerlegen. Warum ist die Anzahl dieser Dreiecke um eins größer, als die Anzahl der Diagonalen aus einer Winkelspitze?

§. 4.

Größe sämmtlicher Polygonwinkel.

Die Größe sämmtlicher Polygonwinkel eines nEcks ist $= 2\,nR - 4\,R = (n-2)\ 2\,R$.

Beweis: 1. Denkt man sich nach §. 3 das Polygon durch Diagonalen in $(n-2)$ Dreiecke zerlegt, so ist die Summe sämmtlicher Dreiecks-Winkel $= (n-2)\ 2\,R$ zugleich auch die Summe der Polygonwinkel.

2. Denkt man sich das n-Eck durch Linien, von einem Punkte innerhalb der Figur nach den Winkelspitzen gezogen, in n Dreiecke zerlegt, so ist die Summe sämmtlicher Dreieckswinkel $= 2\,Rn = 2\,nR$. Da in dieser Zahl aber die Summe der Winkel um den Punkt $= 4\,R$ mit enthalten ist, so ist die Summe der Polygonwinkel $= 2\,nR - 4\,R = (n-2)\ 2\,R$.

Fragen: Wie groß ist die Summe der äußeren Winkel? Wie groß ist die Summe der Außenwinkel bei Figuren, die nur concave Polygonwinkel haben? Wie groß ist die Summe der Außenwinkel bei Figuren mit convexen Polygonwinkeln, wenn der Drehungsgegensatz bei ihrer Entstehung berücksichtigt wird?

§. 5.

Zerlegung der Polygone.

Jedes Polygon läßt sich auf sehr verschiedene Weise in Dreiecke oder Vierecke zerlegen, von denen folgende für die Bestimmung und Zeichnung der Polygone die wichtigsten sind. Polygone werden in Dreiecke zerlegt:

a. Durch sich nicht durchschneidende Diagonalen aus verschiedenen Winkelspitzen.

b. Durch Diagonalen aus einer Winkelspitze.

c. Durch Strahlen von einem Punkte aus.

d. Polygone werden in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze durch Coordinaten, d. h. Abscissen und Ordinaten, zerlegt. Was sind Coordinaten, Abscissenachse, Ordinatenachse, Abscissen, Ordinaten, rechtwinklige, schiefwinklige Ordinaten u. s. w.?

Bemerkung 1. Bei dieser Gelegenheit bleibt es dem Lehrer überlassen, wie viel er für gut hält, seinen Schülern von diesen Grundbegriffen der analytischen Geometrie an dieser Stelle mitzutheilen. Auf jeden Fall werden diese neuen Begriffe sehr nützlich sein, um dem etwas sterilen Stoffe neue Seiten abzugewinnen. 2. Bei den einzelnen Zerlegungen lasse sich der Lehrer ihre Vorzüge und Nachtheile angeben, sowie Figuren zeichnen, für welche die eine oder andere Zerlegung besonders geeignet ist.

§. 6.

Bestimmung der Vielecke.

a. Jedes Vieleck ist durch $2n - 3$ auf einander folgende Seiten und Winkel bestimmt, jedoch dürfen die 3 letzten fehlenden Stücke nicht sämmtlich Seiten sein. Warum? Welche Stücke können fehlen?

b. Jedes Vieleck ist durch seine Seiten und sämmtliche Diagonalen aus einer Winkelspitze oder durch sämmtliche sich nicht durchschneidenden Diagonalen bestimmt. Warum?

c. Jedes Vieleck ist durch seine sämmtlichen Eckstrahlen und Strahlenwinkel bestimmt. Warum?

d. Jedes Vieleck ist durch seine sämmtlichen Abscissen und Ordinaten bestimmt. Warum?

Fragen: Wann sind zwei Vielecke von gleich vielen Seiten congruent?

§. 7.

Zeichnung der Vielecke.

Vielecke können, wenn die zu ihrer Zeichnung nöthigen Bestimmungsstücke nach 6 gegeben sind, auf vier verschiedene Arten gezeichnet werden:

a. Durch Abtragung von Seiten und Winkeln.
b. Durch Abtragung von Seiten und Diagonalen.
c. Durch Abtragung von Strahlen und Strahlenwinkeln.
d. Durch Abtragung von Abscissen und Ordinaten.

Bemerkung. Bei der Zeichnung der Vielecke kommen in der Praxis zwei Fälle vor. Entweder soll nämlich zu einer vorliegenden gezeichneten Figur eine congruente gezeichnet werden, oder es soll ein Vieleck gezeichnet werden, das einem anderen Vielecke congruent ist, dessen Bestimmungsstücke in Zahlen gegeben sind. In beiden Fällen geben die Sätze über die Bestimmung des Vielecks leicht die Mittel an die Hand, das Vieleck zu zeichnen, so daß es hinreichend sein wird, den Schüler auf die eine oder andere Art ein Paar verwickelte vielseitige Figuren zeichnen zu lassen.

Uebungsaufgaben.

1. Ein Fünfeck aus fünf Seiten und 2 an einer Seite liegenden Winkeln zu zeichnen.
2. Ein Fünfeck aus 5 Seiten und 2 aus einer Winkelspitze auslaufenden Diagonalen zu zeichnen.
3. Ein Fünfeck aus vier Seiten und den 3 eingeschlossenen Winkeln zu zeichnen.

4. Ein Sechseck aus den 6 Strahlen und den von ihnen eingeschlossenen Strahlenwinkeln zu zeichnen.

Uebungsaufgaben zu Abschnitt 5.

1. Ein Quadrat aus seinem Umfange zu zeichnen.
2. Ein Quadrat aus seiner Diagonale zu zeichnen.
3. Ein Rechteck aus der Diagonale und dem Winkel, den diese mit der einen Seite macht, zu zeichnen.
4. Ein Rhomboid aus einer Seite und den beiden Diagonalen zu zeichnen.
5. Ein Rhomboid aus einer Diagonale und zwei anstoßenden Seiten zu zeichnen.
6. Einen Rhombus aus Diagonale und Seite zu zeichnen.
7. Einen Rhombus aus beiden Diagonalen zu zeichnen.
8. Ein Trapez zu zeichnen, wenn zwei anstoßende Seiten und beide Diagonalen gegeben sind.
9. Ein Viereck aus vier Seiten und einem Winkel zu zeichnen, wenn die Lage des Winkels bestimmt ist.
10. Ein Viereck aus dessen 4 Seiten und einer bestimmten Diagonale zu zeichnen.
11. Ein Viereck aus 2 gegenüberstehenden Seiten und 3 Winkeln zu zeichnen.
12. Ein Viereck aus 3 aufeinanderfolgenden Seiten und den beiden Winkeln an der vierten Seite zu zeichnen.

Uebergang.

Die drei letzten Abschnitte haben die Bedingungen für die vollkommene Bestimmung der geradlinigen Figuren in Bezug auf Inhalt und Form zugleich dargelegt und die daraus sich ergebenden wichtigsten Eigenschaften und Constructionen gefolgert und ausgeführt. Die nächsten Abschnitte werden die Bedingungen für den Inhalt und die für die Form getrennt behandeln und die daraus sich ergebenden Lösungen der Aufgaben über Inhaltsberechnung und Formbestimmung der geradlinigen Figuren ableiten.

Siebenter Abschnitt.

Von der Bestimmung des Flächeninhalts geradliniger Figuren oder von den Bedingungen ihrer Gleichheit.

§. 1.

Inhalt der Figuren.

Unter dem Inhalte einer Figur versteht man die von ihrem Umfange begrenzte Ebene nur ihrer Größe nach betrachtet.

§. 2.

Grundlinie und Höhe der Dreiecke und Parallelogramme.

Grundlinie oder Basis heißt jede beliebige Seite eines Dreiecks oder Parallelogramms, über der man sich die Figur construirt denkt. Höhe eines Dreiecks oder Parallelogramms heißt ein Perpendikel, das von der gegenüberliegenden Winkelspitze oder Gegenseite auf die Grundlinie oder deren Verlängerung gefällt wird.

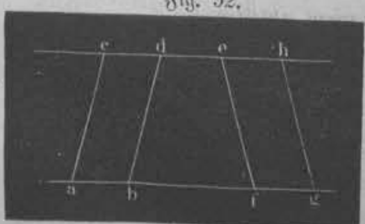
Fragen: Wie viele verschiedene Höhen hat ein Dreieck? Wie viele verschiedene Höhen hat ein Parallelogramm? Warum sind alle Höhen zwischen denselben Gegenseiten in einem Parallelogramme gleich? In welchen Dreiecken liegen alle 3 Höhen innerhalb des Dreiecks? u. s. w. Wovon hängt die Lage der Höhen im Dreiecke ab? In welchem Dreiecke sind alle 3 Höhen gleich, in welchem nur 2 und warum? Wovon hängt die Größe der Höhen in einem Dreiecke ab? In welchen Parallelogrammen fallen die Höhen mit den Nachbarseiten zusammen, und in welchen Parallelogrammen sind beide Höhen gleich? Wie verhalten sich die Höhen zweier Dreiecke oder Parallelogramme, die zwischen denselben Parallelen construirt sind, und warum? Wie lassen sich Dreiecke und Parallelogramme von gleicher Höhe immer construiren?

§. 3.

Gleichheit der Parallelogramme.

Zwei Parallelogramme sind gleich, wenn sie gleiche Grundlinie und Höhe haben.

Fig. 52.



Beweis: Denkt man sich die beiden Parallelogramme *abcd* und *efgh*, deren Grundlinien und Höhen gleich sind, zwischen denselben parallelen Linien gezeichnet, so daß sie ganz außer einander liegen, ohne sich zu

berühren, so entsteht jedesmal, wie in beistehender Figur, ein Trapez *achg* und in ihm zwei congruente Trapeze *acef* und *dbhg*. Warum? Zieht man von beiden congruenten Figuren die zwischen ihnen liegende Figur *dbef* ab, so bleiben die beiden gegebenen Parallelogramme als gleiche Reste übrig.

Fragen: Wann haben zwei Parallelogramme nothwendig gleiche Grundlinien oder gleiche Höhen? Wie heißen die beiden Umkehrungen des bewiesenen Satzes?

§. 4.

Vergleichung der Parallelogramme und Dreiecke.

a. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe. Warum? Oder:

b. Ein Parallelogramm ist das Doppelte eines Dreiecks von gleicher Grundlinie und Höhe.

c. Zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich. Warum?

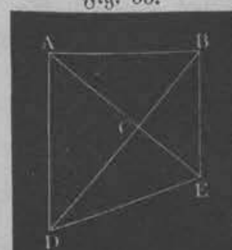
Fragen: Wann haben zwei Dreiecke gleiche Grundlinie und Höhe? Wie lauten die Umkehrungen der voranstehenden Sätze?

§. 5.

Gleichheit von Scheiteldreiecken.

Scheiteldreiecke (d. h. Dreiecke, die durch die Schenkel von Scheitelwinkeln gebildet werden) sind einander gleich, wenn die Verbindungslinien der Endpunkte ihrer Grundlinien parallel sind.

Fig. 53.



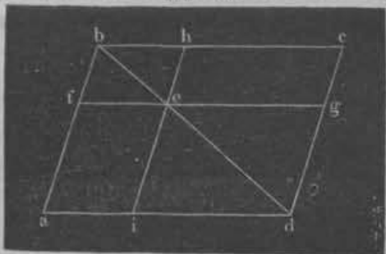
Beweis: Die beiden Scheiteldreiecke *ABC* und *DCE* in beistehender Figur sind gleich, wenn $AD \parallel BE$. Der Beweis ergibt sich leicht aus der Vergleichung der beiden Dreiecke *ABD* und *AED* und durch Wegnahme des gemeinschaftlichen Dreiecks *ACD*. — Wie könnte der Beweis auch noch geführt werden?

§. 6.

Gleichheit der Ergänzungsparallelogramme.

Wenn durch irgend einen Punkt der Diagonale eines Parallelogrammes Parallelen mit den Seiten des Parallelogrammes gezogen werden, so zerfällt dadurch das Parallelogramm *a* in vier Parallelogramme, von denen *b* diejenigen beiden gleich sind, durch welche die Diagonale nicht geht (Ergänzungsparallelogramme).

Fig. 54.



Beweis: Wenn $abcd$ ein Parallelogramm, bd eine Diagonale und $hi \parallel ab$, sowie $fg \parallel ad$, so sind a. $bfeh$, $hecg$, $egid$ und $eiaf$ Parallelogramme und b. $afei = hecg$. — Der Beweis von a folgt aus der Construction und der von b aus der Congruenz der Dreiecke an den verschiedenen Seiten der Diagonale.

Fragen: Wie wird sich der Satz specieller für die verschiedenen Arten der Parallelogramme ausdrücken lassen? Wie wird er lauten, wenn der gegebene Punkt der Halbirungspunkt der Diagonale ist? Wie verhalten sich die Ergänzungsparallelogramme ihren Winkeln nach? Zur Lösung welcher Aufgabe wird der Satz benutzt werden können? Wann werden zwei Scheitelparallelogramme einander gleich sein?

§. 7.

Vergleichung zweier Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Höhe und ungleicher Grundlinie und umgekehrt.

a. Zwei Parallelogramme oder Dreiecke von gleichen Höhen und ungleichen Grundlinien verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Höhen oder deren Maßzahlen.

Fig. 55.

Beweis: Haben die beiden Parallelogramme, wie in beistehenden Figuren, gleiche Höhen und ungleiche Grundlinien, so denke man sich die Grundlinien, falls sie commensurabel sind, durch ein gemeinschaftliches Maß, oder falls sie incommensurabel sind, durch die unendlich kleine oder kleinste Linie getheilt und in beiden Fällen durch jeden Theilpunkt Parallelen mit den Gegenseiten gezogen. Es enthalten dann in beiden Fällen die Parallelogramme eben so

viele unter sich gleiche kleinere Parallelogramme, als die Grundlinien kleinere unter sich gleiche Linien enthalten, und haben demnach dasselbe Verhältniß, das die Grundlinien zu einander haben. Der Beweis für Dreiecke ist ganz dem voranstehenden ähnlich.

b. Zwei Parallelogramme oder Dreiecke von ungleichen Höhen und gleichen Grundlinien verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Höhen oder deren Maßzahlen.

Beweis: Der Beweis wird bei den Parallelogrammen durch Theilung der Höhe ganz ähnlich wie bei a geführt, bei den Dreiecken aber durch Ergänzung zu Parallelogrammen und dann durch Reduction.

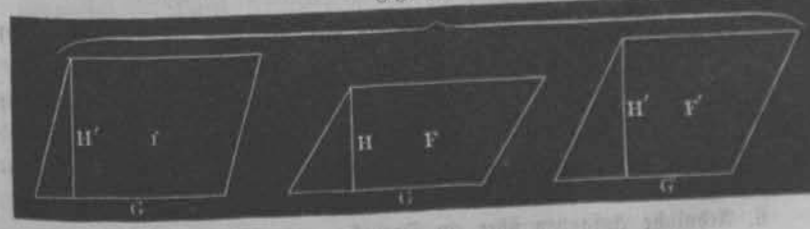
Bemerkung. Viele Mathematiker lassen die Beweisführung für den Fall der Incommensurabilität nicht gelten, weil die unendlich kleine Linie nicht existire, ihr Zahlenverhältniß zu einer endlichen Linie sich nicht angeben lasse, da von einer Vergleichung oder Ausmessung einer endlichen Linie durch sie nicht die Rede sein könne. Allein dann bedenke man Folgendes: Wenn die unendlich kleine Linie für den Mathematiker nicht existirt, so existirt ebensowenig für ihn der Punkt, die Linie, die Ebene und der geometrische Körper, kurz keine der geometrischen Constructionen oder reinen Anschauungen. Ferner beruht die Beweiskraft (nervus probandi) nicht in der Angabe, wie vielmal die unendlich kleine Linie in den Grundlinien beider Parallelogramme enthalten sei, sondern nur darin, daß die Zahl der kleineren Grundlinien und der auf ihnen stehenden gleichen Parallelogramme in beiden Fällen gleich ist. — Der Anschauung der Stetigkeit kann man durch den Verstand nur durch den Begriff des Unendlichkleinen beikommen; wer ihn wirklich vermeiden will, muß nothwendig zu indirecten Beweisen seine Zuflucht nehmen.

§. 8.

Vergleichung von Parallelogrammen und Dreiecken von ungleichen Grundlinien und Höhen.

Parallelogramme und Dreiecke von ungleicher Höhe und Grundlinie verhalten sich wie die Producte aus Höhen und Grundlinien, d. h. wie die Producte der Maßzahlen aus Höhen und Grundlinien.

Fig. 56.



Beweis: Wenn die Grundlinien zweier Parallelogramme oder Dreiecke G und G', ihre zugehörigen Höhen H und H' und die Figuren selbst F und F' sind, so ist in beiden Fällen $F : F' = GH : G'H'$. — Denn denkt man sich zu beiden Parallelogrammen noch ein drittes Parallelogramm (f) mit der Grundlinie des ersten (G) und der Höhe des zweiten (H') gezeichnet, wie in beistehender Figur, so ist

$$F : f = H : H'$$
$$f : F' = G : G'$$
Daher $F : F' = HG : H'G'$

Bei Dreiecken würde der Beweis ganz ähnlich sein.

§. 9.

Vergleichung von Dreiecken und Parallelogrammen mit einem gleichen Winkel.

Dreiecke und Parallelogramme mit einem gleichen Winkel verhalten sich wie die Produkte der den gleichen Winkel einschließenden Seiten.

Beweis: Der Beweis ist sehr leicht dadurch zu führen, daß man die beiden Dreiecke oder Parallelogramme zu Scheitelfiguren macht, ein Hilfsdreieck oder Parallelogramm zu ihnen zeichnet, beide damit vergleicht und die beiden gefundenen Proportionen zusammensetzt.

Fragen: Wie wird folgender Satz mit Hilfe des voranstehenden Satzes bewiesen? Wenn man den Winkel eines Dreiecks halbirt, so haben die Abschnitte auf der dritten Seite dasselbe Verhältniß, das die anliegenden Seiten haben.

§. 10.

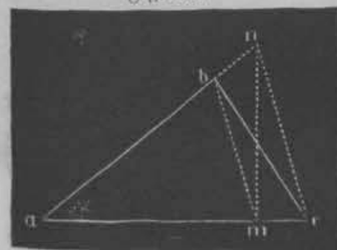
Aufgaben.

Zu den nachfolgenden Aufgaben ist die Auflösung und der Beweis auszuführen.

1. Ein Dreieck oder Parallelogramm in n gleiche Theile zu theilen.
2. Ein Dreieck oder Parallelogramm in ein anderes mit vorgeschriebenem (rechten) Winkel zu verwandeln.
3. Ein Dreieck in ein Parallelogramm mit derselben Grundlinie (Höhe) zu verwandeln.
4. Ein Parallelogramm in ein Dreieck mit derselben Grundlinie (Höhe) zu verwandeln.
5. Ein Parallelogramm zu zeichnen, das der Summe dreier Parallelogramme von gleichen Grundlinien, aber verschiedenen Höhen gleich ist.
6. Aehnliche Aufgaben über ein Dreieck.

7. Ein Parallelogramm zu zeichnen, das der Differenz zweier Parallelogramme von gleichen Höhen, aber verschiedenen Grundlinien gleich ist.
8. Aehnliche Aufgaben über ein Dreieck.
9. Ein Parallelogramm in ein anderes mit vorgeschriebener Seite zu verwandeln.
10. Ein Dreieck in ein anderes mit vorgeschriebener Basis zu verwandeln, so daß ein Winkel an der Basis ungeändert bleibt.

Fig. 57.



Auflösung. Soll ein Dreieck in ein anderes mit vorgeschriebener Basis verwandelt werden, so daß ein Winkel an derselben ungeändert bleibt, so schneide man von der unveränderlichen Winkelspitze aus die neue Basis ab, verbinde den Endpunkt der neuen Basis mit der Spitze durch eine gerade Linie, ziehe mit dieser Linie aus dem Endpunkte der alten Basis eine Parallele bis zum anderen, nöthigen Falls zu verlängernden Schenkel des unveränderlichen Winkels. Verbindet man dann den Durchschnittspunkt der Parallelen und des Schenkels mit dem Endpunkte der neuen Grundlinie durch eine gerade Linie, so ist das dadurch entstandene Dreieck das verlangte.

Beweis: Der Beweis ist an einer bestimmten Figur auszuführen.

11. Ein Dreieck in ein anderes mit vorgeschriebener Höhe zu verwandeln. Aehnlich wie die vorige Auflösung zu behandeln.
12. Von einem Vielecke eine Ecke abzuschneiden.

Auflösung. Man ziehe die Diagonale vor der wegfallenden Ecke, verlängere eine der an die Schenkel der Ecke anstoßenden Seiten, ziehe aus der wegfallenden Ecke eine Parallele mit der Diagonale bis zu der verlängerten Seite und von dem Durchschnittspunkte eine Linie nach dem anderen Endpunkte der Diagonale. Es ist dann durch dieselbe eine Winkelspitze abgeschnitten, ohne daß der Inhalt geändert wird. Warum?

13. Die gebrochene Grenzlinie zweier Ebenen in eine gerade Linie zu verwandeln. — Durch Anwendung von 12 auszuführen.

Achter Abschnitt.

Von der Ausmessung oder Berechnung der geradlinigen Figuren.

§. 1.

Erklärung der Figurenausmessung.

Eine ebene Figur ausmessen oder besser berechnen heißt, dieselbe mit einer anderen bekannten Figur ihrer Größe nach vergleichen und in Zahlen (Flächenzahlen, Flächeneinheit, Flächenmaß) angeben, wie viel mal das Maß oder ein Theil von ihm in ihr enthalten ist.

§. 2.

Bestimmung der Flächeneinheit.

Als Flächenmaß dient dasjenige Quadrat, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist, und das nach der Größe der Längeneinheit Quadratzoll, Quadratfuß, Quadratruthe, Quadratmeile genannt wird.

Fragen: Aus welchen Gründen ist wohl das Quadrat zur Flächeneinheit gewählt? Kann bei Figuren von einer unmittelbaren Ausmessung, wie bei geraden Linien oder geradlinigen Winkeln die Rede sein? Wie werden Ruthen, Fuß, Zoll bezeichnet.

§. 3.

Werkmaß und Decimalmaß.

Beim Ausmessen von Flächen geht man in Norddeutschland (Preußen, Hannover, Braunschweig u. s. w.) gewöhnlich von der landesüblichen Ruthe als Haupteinheit aus. Wird die Ruthe zur Erleichterung der Rechnungen in 10, 100, 1000 gleiche Theile getheilt, so heißt ein jeder dieser Theile Decimalfuß, Decimalzoll, Decimallinie zum Unterschiede von dem gewöhnlichen landesüblichen Maße, dem Werkfuße und seinen Theilen. —

Fragen: Was ist ein Duodecimalfuß? Wann kann man das Werkmaß Duodecimalmaß nennen? Welches sind die Eintheilungszahlen a. bei dem Längen-, Werk- und Decimalmaße; b. bei dem Flächen-, Werk- und Decimalmaße? Wie wird reducirt: a. beim Werkmaß? | α beim Längenmaß?
b. beim Decimalmaß? | β beim Flächenmaß?
Wie wird Decimal- in Werkmaß und umgekehrt verwandelt?

Bemerkung. Was in den vorstehenden Fragen nur kurz angedeutet ist, muß von den Schülern tüchtig eingeübt sein, ehe der Unterricht zu den folgenden Berechnungsaufgaben fortschreitet, und namentlich muß der Schüler auf Rechnungsvortheile bei den Reductionen aufmerksam gemacht werden, um ohne weitläufige Schreibereien die Rechnungen machen zu können. — Zu diesem Zweck muß der Schüler z. B. gewöhnt werden, die Multiplicationen und Divisionen mit den Eintheilungszahlen (12, 16) auf einmal vorzunehmen und namentlich die Reste bei den Divisionen nie hinzuschreiben u. s. w.

§. 4.

Berechnung des Parallelogramms.

Der Flächeninhalt eines Parallelogrammes (als Flächenzahl) ist dem Producte aus (den Flächenzahlen der) Grundlinie und Höhe gleich, (wenn beide mit einerlei Maß gemessen und in einer und derselben Einheit ausgedrückt sind).

Beweis: Wird das Parallelogramm mit P, die Längenzahlen der Grundlinie und Höhe mit g und h, die quadratische Flächeneinheit mit Q und die Längeneinheit mit 1 bezeichnet, so ist

nach VII. 8 $P : Q = gh : 1 \times 1 = gh : 1$

daher $P = gh.\, Q$ oder $\dfrac{P}{Q} = gh.$

d. h. die quadratische Einheit steckt in dem Parallelogramme so viel mal, als das Product (der Längenzahlen) aus Grundlinie und Höhe anzeigt. —

Bemerkung 1. Statt des genauen und correcten Ausdrucks für den Flächeninhalt, wie er im Texte steht, bedient man sich gewöhnlich folgender, sehr bequemen Abkürzung: „der Flächeninhalt eines Parallelogrammes ist dem Producte aus Grundlinie und Höhe gleich", die in der Folge auch im Leitfaden für alle ähnlichen Aufgaben gebraucht werden soll. Aber immer ist der Ausdruck eine Abbreviatur, die nur gebraucht werden darf, wenn ihr Sinn vorher erklärt ist. 2. Da die Beweise für alle folgenden Berechnungsaufgaben auf den voranstehenden Beweis sehr leicht zurückzuführen sind, so sind sie zu den folgenden Rechnungsregeln gar nicht hinzugefügt.

§. 5.

Berechnung der Höhe oder Grundlinie eines Parallelogramms.

Die Grundlinie oder Höhe eines Parallelogramms ist dem Quotienten aus dem Inhalte dividirt durch die Höhe oder Grundlinie gleich.

Formeln: $g = \frac{P}{h}$ und $h = \frac{P}{g}$.

(Wie würde die Regel vollständig nach Analogie von 4 lauten müssen?

Beweis: Da nach 4. $P = gh$, so ist $g = \frac{P}{h}$ und $h = \frac{P}{g}$.)

§. 6.

Berechnung des Dreiecks.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks (D) ist dem halben Producte aus Grundlinie und Höhe gleich oder in Zeichen $D = \frac{gh}{2} = \frac{g}{2}\,h = \frac{h}{2}\,g$. Warum?

§. 7.

Berechnung der Grundlinie oder Höhe eines Dreiecks.

Die Grundlinie oder Höhe eines Dreiecks ist dem Quotienten aus dem doppelten Inhalte dividirt durch die Höhe oder Grundlinie gleich. Warum?

Formeln: $g = \frac{2D}{h} = \frac{D}{{}^1/_2 h}$;

$$h = \frac{2D}{g} = \frac{D}{{}^1/_2 g}.$$

§. 8.

Berechnung des Quadrats.

Der Inhalt eines Quadrates ist der Quadratzahl seiner Seite (9) gleich.

Formel: $Q = q^2$.

§. 9.

Berechnung der Seite eines Quadrates.

Die Seite des Quadrates ist der Quadratwurzel aus dem Inhalte gleich.

Formel: $q = \sqrt{Q}$.

Bemerkung. Ist in dem arithmetischen Cursus die Lehre von der Wurzelausziehung noch nicht durchgenommen, so wird bei dieser Aufgabe wenigstens das mechanische Verfahren der Wurzelausziehung kurz erklärt werden müssen, wenn der Lehrer die Aufgabe nicht überschlagen und auf spätere Zeiten aufsparen will.

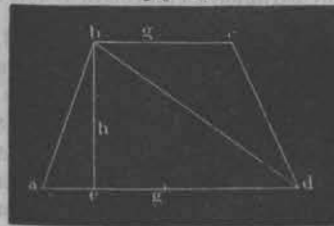
§. 10.

Berechnung des Trapezes.

Der Inhalt des Trapezes (T) ist dem Producte aus der halben Summe der parallelen Seiten (g, g') und der Höhe (h) gleich.

Formel: $T = \left(\frac{g + g'}{2}\right) h = (g + g')\,\frac{h}{2}$.

Fig. 58.



Beweis: Denkt man sich in dem Trapez $abcd$ zwischen den parallelen Seiten bc und ad als Grundlinien (g, g') die Höhe $be = h$ gezogen, so ist $\triangle\, abd = \frac{g'\,h}{2}$ und $\triangle\, bcd = \frac{g\,h}{2}$; daher $T = \triangle\, abd + \triangle\, bcd = \frac{g'\,h}{2} + \frac{g\,h}{2} = \left(\frac{g + g'}{2}\right) h$.

§. 11.

Berechnung der Höhe des Trapezes.

Die Höhe des Trapezes ist dem Quotienten aus dem doppelten Inhalt dividirt durch die Summe der beiden parallelen Seiten gleich. Warum?

Formel: $h = \frac{2\,T}{g + g'}$.

§. 12.

Berechnung einer parallelen Seite des Trapezes.

Eine parallele Seite des Trapezes ist dem Unterschiede zwischen dem Quotienten aus dem doppelten Inhalte des Trapezes durch die Höhe und der anderen parallelen Seite gleich. Warum?

Formel: $g = \frac{2\,T}{h} - g'$.

§. 13.

Berechnung des Vierecks oder Trapezoids.

Der Inhalt eines Vierecks (V) oder Trapezoids ist dem Producte aus der Diagonale (d) und der Summe der aus den beiden anderen Winkelspitzen auf sie gefällten Höhen (h, h') gleich. Warum?

Formel: $V = d\left(\frac{h + h'}{2}\right)$.

§. 14.

Berechnung jeder vielseitigen Figur.

Jede vielseitige Figur ist dem Inhalte der einzelnen Dreiecke oder Trapeze gleich, in welche sie durch Diagonalen oder durch Abscissen und Ordinaten zerlegt werden kann. Was versteht man unter Abscissen und Ordinaten? Wie würde man wohl zu verfahren haben, wenn man innerhalb der Figur, wie z. B. in einem Walde oder in einem Teiche keine Messungen vornehmen könnte?

Bemerkung. 1. Welche Zerlegung eines Polygons die bequemste ist, hängt theils von der Beschaffenheit der Figur, theils von den Instrumenten ab, mit welchen die wirklichen Messungen auf dem Felde ausgeführt werden. 2. Bisher haben wir nur gelernt, wie der Inhalt der Figuren allein aus gemessenen Linien und zwar aus Grundlinie und Höhe gefunden werden kann. Später werden wir den Inhalt der Dreiecke auch aus den drei Seiten und in der ebenen Trigonometrie nicht nur den Inhalt der Dreiecke, sondern auch aller übrigen Polygone aus Seiten und Winkeln berechnen lernen.

Uebungsaufgaben.

In den folgenden Aufgaben soll das Resultat, wenn nicht ausdrücklich etwas Anderes bestimmt ist, immer in denselben Einheiten ausgedrückt werden, in denen die bekannten Stücke gegeben sind. Steht bei den Fußangaben keine Bezeichnung, so sind Werkfuß zu verstehen.

1. Wie groß ist der Inhalt des Parallelogramms, wenn $g = 2'\ 8''$ und $h = 1'\ 9''$?

2. Wie groß ist der Inhalt eines Parallelogramms, wenn $g = 37{,}3$ Meter und $h = 21{,}3$ Meter, in Braunschweigischen Fußen, wenn $3^1/_2$ Br. F. = 1 Meter?

3. Wie viel Morgen enthält ein Acker, der ein Rechteck bildet, wenn $g = 34^0\ 9'\ 8''$ und $h = 21^0\ 7'\ 9''$ in Decimalmaß ist?

4. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Inhalt dem eines Parallelogramms gleich ist, dessen Grundlinie $= 7^0\ 4'\ 5''$ und dessen Höhe $4^0\ 9'\ 4''$ in Decimalmaß ist.

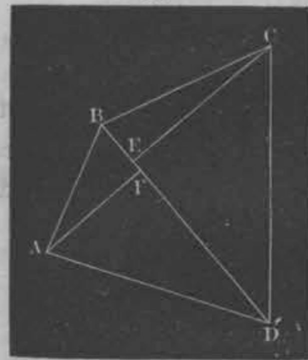
5. Wie groß ist ein Dreieck, wenn $g = 7'\ 6''$ und $h = 9'\ 4''$?

6. Wie groß ist die Höhe eines Dreiecks, wenn $\triangle = 314'\ 76''$ und $g = 24'\ 9''$?

7. Wie groß ist die Grundlinie eines Dreiecks von einem Braunschweiger Morgen (120 □ Ruthen) Inhalt und $35^0\ 6'$ Decimalmaß Höhe?

8. Wie groß ist ein Trapez, wenn $g = 7'\ 8''$, $g' = 9'\ 9''$ und $h = 4'\ 5''$?

Fig. 59.



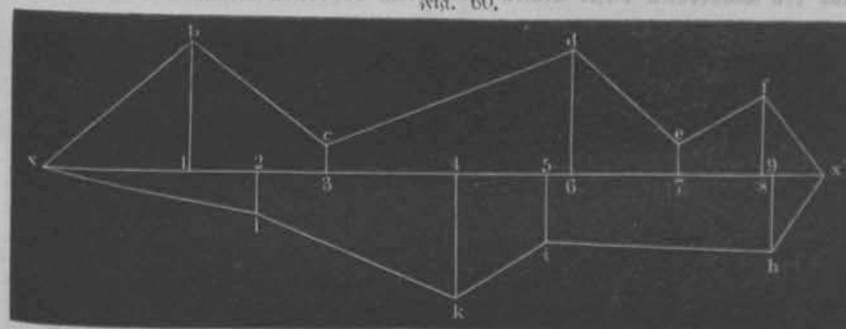
9. Wie groß ist die Höhe eines Trapezes, wenn $T = 35^0\ 24'\ 96''$, $g = 2^0\ 4'\ 5''$, $g' = 5^0\ 4'\ 9''$ Decimalmaß ist?

10. Wie groß ist die Grundlinie eines Trapezes, wenn $T = 218'\ 96''$, $g = 12'\ 9''$ und $h = 16'\ 6''$?

11. Wie groß ist das Viereck $ABCD$, wenn $BD = 17^0\ 4'\ 2''$, $AF = 4^0\ 5'\ 9''$ und $EC = 7^0\ 8'\ 9''$ ist.

12. Wie groß ist das Vieleck *abcdefghikl* der untenstehenden Figur,

Fig. 60.



wenn die einzelnen Abscissen von x angemessen mit x_1 x_2 .... und die einzelnen zugehörigen Ordinaten mit y_1, y_2 ... bezeichnet werden und folgende Länge haben:

$x_1 = 7'\ 4''$ und $y_1 = 7'\ 2''$
$x_2 = 11'\ 3''$ $y_2 = 10'\ 3''$
$x_3 = 14'\ 5''$ $y_3 = 3'\ 4''$
$x_4 = 20'\ 2''$ $y_4 = 5'\ 8''$
$x_5 = 25'\ 3''$ $y_5 = 3'\ 9''$
$x_6 = 26'$ $y_6 = 7'\ 4''$
$x_7 = 31'\ 6'$ $y_7 = 2'\ 2''$
$x_8 = 39'\ 4'$ $y_8 = 5'\ 2''$
$x_9 = 40'\ 2''$ $y_9 = 6'\ 4''$
$xx' = 47'\ 8''$

Neunter Abschnitt.

Verhältniß der Quadrate, die über bestimmten Linien construirt sind. Pythagoräischer Lehrsatz und seine Anwendung zur Bestimmung des Zahlenverhältnisses der wichtigsten Linien im Dreieck und seines Inhaltes.

§. 1.

Größe des Quadrates über der Summe zweier Linien.

Jedes Quadrat, das über der Summe zweier Linien construirt ist, besteht aus den Quadraten dieser Linien und ihrem doppelten Rechtecke.

Beweis: Wenn a und b die beiden gegebenen Linien sind, so braucht nur das Quadrat ihrer Summe gezeichnet zu werden und in ihm ein Paar parallele Hilfslinien, um das Vorhandensein der im Satze angegebenen Quadrate unmittelbar aus der Construction zu ersehen. — Für welchen arithmetischen Satz enthält der eben bewiesene Satz die geometrische Construction? Wie verhält sich das Quadrat einer Linie zu dem Quadrate ihrer Hälfte?

§. 2.

Größe des Quadrates eines Theiles einer Linie.

Jedes Quadrat, das über einem Theile einer Linie construirt wird, ist dem Quadrate der ganzen Linie und dem des andern Theiles gleich weniger dem doppelten Rechtecke aus der ganzen Linie und dem andern Theile.

Beweis: Wenn die Linie AB wie in beistehender Figur in zwei Stücke AC und CB getheilt ist, so ist $CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ (AB\,.\,AC)$ und $AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2\ (AB\,.\,CB)$. Denn construirt man das Quadrat der ganzen Linie mit den Hilfslinien der vorigen Figur und an ihm an passender Stelle das Quadrat des einen Theiles, so ergibt sich der Beweis unmittelbar aus der construirten Figur. — Für welchen arithmetischen Satz gibt der bewiesene die Construction?

Fig. 61.

§. 3.

Größe des Unterschiedes zweier Quadrate.

Der Unterschied zweier Quadrate ist dem Rechtecke aus der Summe und Differenz ihrer Seiten gleich.

Beweis: Man construire das kleinere Quadrat in einer Ecke des größern Quadrates, verlängere eine innere Seite des kleinern Quadrates und construire das dadurch entstandene Rechteck an der Außenseite an passender Stelle, so ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus der Construction. — Welchem arithmetischen Satze entspricht der Satz?

Pythagoräischer Lehrsatz.

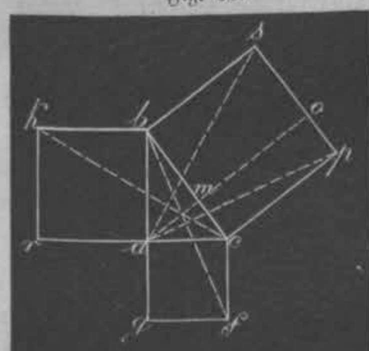
§. 4.

Größenverhältniß der Quadrate über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks.

Das Quadrat der Hypotenuse ist den Quadraten der beiden Katheten zusammengenommen gleich.

Construction und Beweis: Construire ein rechtwinkliges Dreieck mit seinen nach außen liegenden Quadraten über den drei Seiten, fälle aus der Spitze des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Hypotenuse und verlängere dasselbe bis zur Gegenseite des Quadrates der Hypotenuse; endlich ziehe noch vier Linien und zwar zwei aus der Spitze des rechten Winkels nach den gegenüberliegenden Winkelspitzen des Quadrates der Hypotenuse, und außerdem eine aus jeder Spitze eines schiefen Winkels nach der gegenüberliegenden Winkelspitze des Quadrates ihrer Gegenkathete. —

Fig. 62.



Der Beweis zerfällt in zwei völlig gleiche Theile; jeder Theil beweiset die Gleichheit eines Rechteckes und eines Quadrates durch die Congruenz zweier Dreiecke, deren eines die Hälfte eines Rechteckes, das andere die Hälfte eines Quadrates ist. —

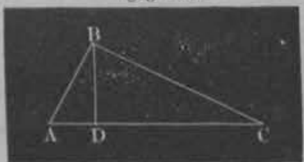
Folgerung: a. Das Quadrat jeder Kathete ist dem Unterschiede des Quadrates der Hypotenuse und der andern Kathete gleich.

b. Das Quadrat jeder Kathete ist dem Rechtecke aus der ganzen Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Abschnitte gleich, wenn die Hypotenuse durch ein Perpendikel aus der rechten Winkelspitze in zwei Abschnitte getheilt wird.

c. Die Quadrate der Katheten haben dasselbe Größenverhältniß, das die Abschnitte der Hypotenuse haben.

Beweis: Ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck und BD ein Perpendikel auf die Hypotenuse, so ist nach b.

Fig. 63.

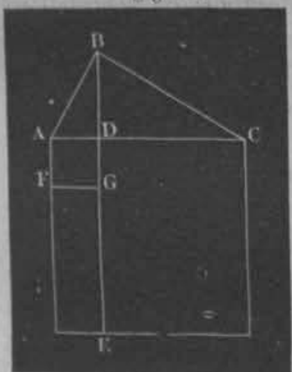


$$AB^2 = AD \,.\, AC \text{ und}$$
$$BC^2 = DC \,.\, AC$$
$$\text{Daher } AB^2 : BC^2 = AD \,.\, AC : DC \,.\, AC$$
$$= AD : DC.$$

d. Das Quadrat des Perpendikels, aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt, ist dem Rechtecke aus den Abschnitten der Hypotenuse gleich.

Beweis: Ist $\triangle\, ABC$ bei B rechtwinklig, BD auf der Hypotenuse perpendikulär, so ist $BD^2 = AD \,.\, DC.$ — Denn construirt man das Quadrat der Hypotenuse, verlängert BD bis E, macht $AF = AD$ und zieht $FG \parallel AC$, so ist $BD^2 = AB^2 - AD^2$. Da nun $AB^2 = AE$ und $AD^2 = AG$, so ist $BD^2 = FE$. Da aber $FE = AD \,.\, DC$, so ist auch

Fig. 64.



$$BD^2 = AD \,.\, DC. \text{ —}$$

§. 5.

Größenverhältniß der Linien eines rechtwinkligen Dreiecks.

1. Die Hypotenuse ist der Wurzel aus der Summe der Flächenzahlen der beiden Katheten gleich. Sind a und b die Katheten, so wie c die Hypotenuse eines rechtwinkligen $\triangle$, so ist $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Warum?

2. Jede Kathete ist der Wurzel aus der Differenz der Flächenzahlen der Hypotenuse und anderen Kathete gleich oder $a = \sqrt{c^2 - b^2}$; $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

3. Jede Kathete ist eine Wurzel aus der Flächenzahl des Rechtecks aus der Summe und Differenz der Hypotenuse und anderen Kathete gleich. Denn da nach drei $c^2 - b^2 = (c + b)\,(c - b) = a^2$, so ist $a = \sqrt{(c + b)\,(c - b)}$.

4. Das Perpendikel ist der Wurzel aus der Flächenzahl des Rechtecks aus den Abschnitten der Hypotenuse gleich. Ist p das Perpendikel, m und n die Abschnitte der Hypotenuse, so ist $p^2 = m \,.\, n$, daher $p = \sqrt{m \,.\, n}$.

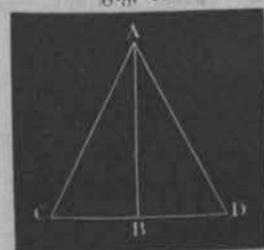
Fragen: Bedeuten a, b, c die Längenzahlen von gegebenen Linien, welche geometrische Constructionen entsprechen dann folgenden algebraischen Ausdrücken: 1. $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2. $\sqrt{a^2 - b^2}$; 3. $\sqrt{ab}$; 4. $\sqrt{(a + b)\,(a - b)}$?

§. 6.

Umkehrung des pythagoräischen Lehrsatzes.

Wenn in einem Dreiecke das Quadrat einer Seite den Quadraten der beiden anderen Seiten zusammengenommen gleich ist, so ist dasselbe rechtwinklig.

Fig. 65.



Beweis: Wenn $AC^2 = AB^2 + CB^2$ so ist $ABC = R$.

Denn ist BD perpendikulär auf AB und gleich CB, so ist $\triangle\, ABD$ rechtwinklig und $\triangle\, ABD \cong \triangle\, ABC$ (drei Seiten gleich. Warum?)

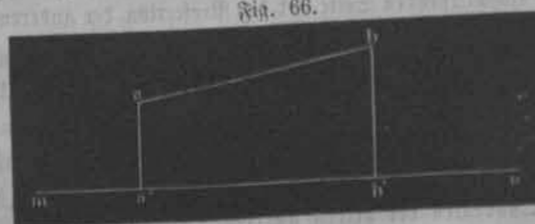
Daher $ABD = ABC = R$.

§. 7.

Erklärung des Begriffes der Projection einer Linie.

Werden von den Endpunkten einer Linie ab Perpendikel auf eine andere Linie mn gefällt, so heißt das zwischen den Fußpunkten dieser Perpendikel

Fig. 66.



liegende Stück $a'\,b'$ der Linie mn die Projection der Linie ab auf die Linie mn. Ist die zu projicirende Linie der Projectionslinie parallel, so ist die Projection der gegebenen Linie gleich. Steht die zu projicirende Linie auf der Projectionslinie winkelrecht, so ist ihre Projection ein Punkt.

Wovon hängt die Größe der Projection einer Linie ab? Wenn zwei Seiten eines Dreiecks auf die dritte oder deren Verlängerung projicirt werden, wie verhalten sich die Projectionen zur dritten Seite? Welche Fälle sind hier zu unterscheiden? Wie werden die Folgerungen aus dem pythagoräischen Lehrsatze lauten, wenn man von dem Begriffe der Projection Gebrauch macht?

§. 8.

Verhältniß der Quadrate der drei Seiten eines stumpfwinkligen Dreiecks.

Das Quadrat der Gegenseite des stumpfen Winkels ist den Quadraten der beiden einschließenden Seiten gleich, vermehrt um ein doppeltes Rechteck aus der einen einschließenden Seite und der Projection der andern auf sie. —

Beweis: Ist im $\triangle ABC$ Winkel B stumpf und BD die Projection von BC auf die Verlängerung von AB, so ist

Fig. 67.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,(AB.BD)$$

Denn $AC^2 = AD^2 + CD^2$ (Pyth. Lehrsatz)

aber $AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2\,(AB.BD)$ (§. 1)

und $CD^2 = CB^2 - BD^2$ (§. 1, a).

Daher $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,(AB.BD)$. —

Wie würde der Beweis ausgefallen sein, wenn man nicht BC auf AB, sondern AB auf BC projicirt hätte?

§. 9.

Verhältniß des Quadrates der Gegenseite eines spitzen Winkels zu den Quadraten der beiden anderen Seiten.

Das Quadrat der Gegenseite eines spitzen Winkels ist den Quadraten der beiden einschließenden Seiten gleich, vermindert um ein doppeltes Rechteck aus der einen einschließenden Seite und der Projection der anderen auf sie. —

Beweis: Der Beweis ist dem vorigen ähnlich und kann gleichfalls auf doppelte Weise geführt werden. — Wie lauten die Umkehrungen dieser beiden Sätze? Wie werden sie indirect bewiesen? In welchem Verhältnisse stehen sie zum pythagoräischen Lehrsatze? Warum ist das Quadrat der Gegenseite des rechten Winkels gerade gleich den Quadraten der beiden anderen Seiten?

§. 10.

Verhältniß der Quadrate der vier Seiten eines Parallelogramms zu den Quadraten der beiden Diagonalen.

Die Quadrate der vier Seiten eines Parallelogramms sind den Quadraten der beiden Diagonalen gleich.

Beweis: Bei den rechtwinkligen Parallelogrammen folgt der Beweis unmittelbar aus dem pythagoräischen Lehrsatze, bei den schiefwinkligen Parallelogrammen wird der Beweis durch Anwendung der beiden vorigen Sätze geführt. —

§. 11.

Verhältniß der Quadrate über den drei Seiten eines Dreiecks zu dem Quadrate einer Transversale.

(D. h. der Verbindungslinie einer Winkelspitze mit dem Halbirungspunkte der Gegenseite.) — Das vierfache Quadrat einer Transversale ist der doppelten Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten gleich, weniger dem Quadrate der Seite, zu welcher die Transversale führt. Sind a, b, c die drei Seiten und t die zu c führende Transversale, so ist $4\,t^2 = 2\,(a^2 + b^2) - c^2$.

Beweis: Zum Beweise kann man entweder die Transversale um ihre eigene Größe verlängern, die Figur zu einem Parallelogramm ergänzen und Satz 10 anwenden oder die Höhe auf c fällen und Satz 8 und 9 auf a^2 und b^2 anwenden. —

Aufgaben.

1. Ein Quadrat zu zeichnen, das der Summe zweier gegebenen Quadrate gleich ist.
2. Ein Quadrat zu zeichnen, das der Differenz zweier gegebenen Quadrate gleich ist.
3. Ein Quadrat zu zeichnen, das n Quadraten gleich ist.
4. Ein Quadrat zu zeichnen, das dem n fachen eines gegebenen Quadrates gleich ist.
5. Ein Quadrat in ein Rechteck mit vorgeschriebener Seite zu verwandeln.
6. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.
7. Ein Quadrat zu zeichnen, das $\frac{1}{n}$ eines gegebenen Quadrates ist.

8. Ein Quadrat zu zeichnen, das $\frac{m}{n}$ eines gegebenen Quadrates ist.

9. Ein Vieleck in ein Quadrat zu verwandeln (zu quadriren).

10. Ein Quadrat zu zeichnen, das dem Unterschiede zweier Vielecke gleich ist.

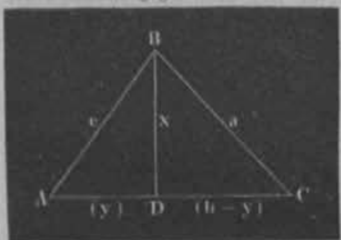
11. Ein Quadrat zu zeichnen, das $\frac{m}{n}$ der Summe zweier Vielecke gleich ist.

§. 12.

Den Flächeninhalt aus den drei Seiten zu berechnen.

Soll der Flächeninhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten bestimmt werden, so muß sich, da eine Seite als Grundlinie betrachtet werden kann, die zu ihr gehörige Höhe aus den drei Seiten berechnen lassen. — Man fälle zu diesem Zwecke in dem Dreiecke ABC auf die Basis AC das Perpendikel BD, bezeichne die drei Seiten des Dreiecks ABC mit a, b, c, das Perpendikel mit x und die Abschnitte auf b mit y und $b-y$, so ist

Fig. 68.



1. $x^2 = c^2 - y^2$ und

2. $x^2 = a^2 - (b-y)^2$.

Daher $c^2 - y^2 = a^2 - (b-y)^2$ oder $c^2 - y^2 = a^2 - b^2 + 2by - y^2$.

und 3. $y = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}$, so wie $b - y = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$.

Setzt man den gefundenen Werth für y in der ersten Gleichung an die Stelle von y, so erhält man

$$4.\ x^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}\right)^2$$

$$= \left(c + \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}\right)\left(c - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}\right)$$

$$= \frac{2bc + c^2 + b^2 - a^2}{2b} \cdot \frac{2bc - c^2 - b^2 + a^2}{2b} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2b} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2b}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b} \cdot \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b} \text{ und}$$

$$5.\ x = \frac{1}{2b}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)}.$$

Da nun $\triangle = \frac{bx}{2}$, so ist

$$6.\ \triangle = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Eine für's Ange übersichtlichere Form erhält man, wenn man $\frac{a+b+c}{2} = s$ setzt. Denn dann wird

$$\frac{b+c-a}{2} = s - a.$$

$$\frac{a+c-b}{2} = s - b.$$

$$\frac{a+b-c}{2} = s - c.$$

Bringt man nun in der Gleichung 6 den Divisor 4 unter das Wurzelzeichen und löset 16 in seine Factoren 2. 2. 2. 2. auf, so wird aus Gleichung 6

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}.$$

$$7.\ \triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Wie lauten die Gleichungen für die Abschnitte (3), für die Höhen (5) und für den Inhalt (6, 7) in Worten ausgedrückt? Wie heißen die Formeln, wenn die Seiten a und c als Grundlinien betrachtet werden? Wie groß sind Höhen, Abschnitte und Inhalt eines Dreiecks, dessen Seiten 13, 14, 15 sind? Wie wird die Ableitung beschaffen sein, wenn das Dreieck stumpfwinklig ist?

§. 13.

Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks ist $= a$ und jeder Schenkel $= b$. Wie groß ist sein Inhalt?

Antwort: $\frac{a}{4}\sqrt{(2b+a)(2b-a)}$.

§. 14.

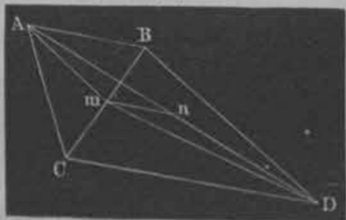
Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks, dessen drei Transversalen gegeben sind? — Zieht man die drei Transversalen in einem Dreieck und verlängert eine über die Basis hinaus um $^1/_3$ ihrer Länge, so erhält man ein Dreieck, in dem die drei Seiten $^2/_3$ der gegebenen Transversalen sind, und das $^1/_3$ des gesuchten Dreiecks ist. — Antwort:

$$^1/_3 \sqrt{(t+t'+t'')\ (t+t'-t'')\ (t+t''-t')\ (t'+t''-t)}.$$

§. 15.

Wenn man in einem beliebigen Viereck, wie in beistehender Figur, die beiden Diagonalen zieht und ihre Halbirungspunkte m und n durch eine gerade Linie verbindet, welche Beziehung findet zwischen den Quadraten der vier Seiten, der Diagonalen und der Verbindungslinie der Diagonalen statt? Die Beziehung kann leicht durch Zeichnung der Hilfslinien Am und mD und durch wiederholte Anwendung von Satz 11 gefunden werden.

Fig. 69.



Bemerkung. Die vorstehenden Aufgaben liefern dem Schüler den mannichfaltigsten Stoff zu Zeichen- und Rechenaufgaben, sowie zur Verwandlung von Buchstabenformeln, und geben ein sehr passendes Material zur Repetition der Regeln über Rechnung mit Buchstabenausdrücken. —

Uebergang. In den Congruenzsätzen haben wir die Bedingungen für die vollständige Gleichheit (Identität) der Figuren, wenn sie nach Größe und Gestalt zugleich verglichen werden, kennen gelernt. In den Sätzen über die Gleichheit der Figuren sind die Bedingungen für die Gleichheit ihrer Größe, ohne ihre Gestalt zu berücksichtigen, enthalten. —

In dem nächsten Abschnitte, der von der Aehnlichkeit der Figuren handelt, werden wir die Bedingungen für die Gleichheit ihrer Gestalt, ohne ihre Größe zu berücksichtigen, kennen lernen.

Zehnter Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

A. Von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 1.

Zwei Dreiecke heißen ähnlich, in denen alle gleichliegenden Winkel und Seitenverhältnisse gleich sind. — Das Zeichen der Aehnlichkeit ist ∞ ein liegendes (Similis). Die Dreiecke ABC und abc sind ähnlich, wenn $A=a$, $B=b$, $C=c$ und $A:B:C=a:b:c=2:3:4$.

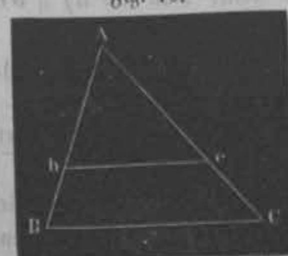
Zwei congruente Dreiecke sind demnach auch nothwendig ähnliche Dreiecke. Warum? Zwei Dreiecke, die einem und demselben dritten Dreieck ähnlich sind, sind auch unter sich ähnlich. Warum? Die nächsten Paragraphen zeigen, welche Winkel- und Seitenverhältnisse nur gleich zu sein brauchen, um aus ihnen auf die Gleichheit der übrigen Stücke und auf die Aehnlichkeit der Dreiecke schließen zu können.

§. 2.

Aehnlichkeit der Dreiecke, die durch parallele Transversalen gebildet werden.

Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine beliebige parallele Transversale, so entsteht dadurch noch ein Dreieck, das a. gleiche Winkel und b. gleiche Seitenverhältnisse mit dem gegebenen Dreieck hat und demnach ihm ähnlich ist.

Fig. 70.



Beweis: Wenn im $\triangle ABC\ bc \parallel BC$ ist, so ist in den Dreiecken ABC und Abc

a. $\left.\begin{array}{l} A=A \\ B=b \\ C=c \end{array}\right\}$ Warum?

b. Denkt man sich den einen Schenkel durch das gemeinschaftliche Maß seiner Abschnitte oder durch die unendlich kleine Linie getheilt, und durch jeden Theilpunkt parallele Transversalen gezogen, so fällt jedenfalls eine Transversale mit bc zusammen.

Nimmt man nun an, daß in AB das gemeinschaftliche Maß oder die unendlich kleine Linie m und in Ab n mal enthalten ist, so ist nach Abschnitt IV. (§. 22)

$$AB : Ab = m : n$$
$$AC : Ac = m : n$$
$$BC : bc = m : n$$

Daher $AB : Ab = AC : Ac = BC : bc = m : n$.

Daher $ABC \sim Abc$.

Fragen: Behält der Satz auch seine Gültigkeit, wenn die Transversale nicht in dem $\triangle$ selbst, sondern zwischen den Schenkeln seiner Scheiteldreiecke gezogen wird?

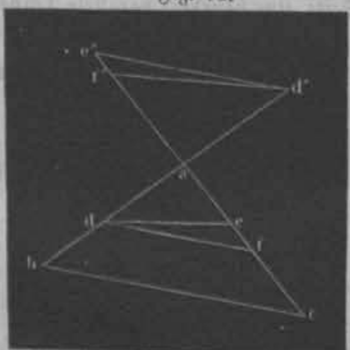
Bemerkung. Was berechtigt uns zu der Annahme, daß die unendlich kleine Linie in AB m und AB n mal enthalten ist oder was sollen wir uns unter den Zahlen m und n in diesem Falle denken? Antwort: Was Jedem beliebt, nur keine endliche Zahl, denn sonst würden die Linien als commensurabel vorausgesetzt. Auch in diesem Beweise wie früher (VII. §. 7) kommt es nicht auf die Größe der einzelnen Zahlen noch der ihnen zu Grunde liegenden Einheiten an, sondern nur darauf, daß überall das Verhältniß $m : n$ vorhanden ist. —

§. 3.

Umkehrung.

Wenn auf den Schenkeln eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel nach derselben oder nach entgegengesetzter Richtung proportionale Stücke abgeschnitten werden, so sind die Verbindungslinien ihrer Endpunkte parallel.

Fig. 71.



Beweis:

Wenn $ab : ac = ad : ae = ad' : ae'$,

so ist $de \parallel bc \parallel d'e'$.

Wäre de ($d'e'$) nicht parallel bc, so denke man sich $df \parallel bc$ durch d gezogen, dann würde

$ab : ac = ad : af$ sein (§. 2).

Da nun auch

$ab : ac = ad : ae$ (Annahme)

so müßten auch $af = ae$ sein, was nur möglich ist, wenn die Punkte e und f zusammenfallen oder $de \parallel bc$ ist. —

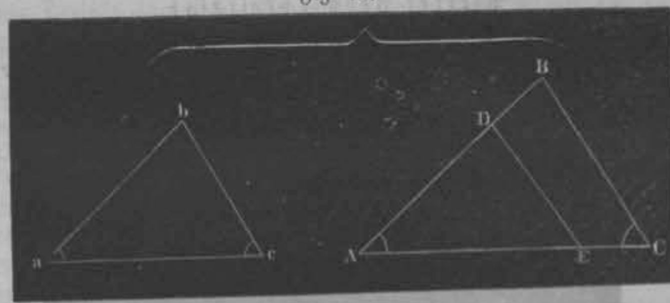
Aehnlichkeitssätze.

§. 4.

Erster Aehnlichkeitssatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei gleiche Winkel haben. —

Fig. 72.



Beweis: Wenn in den beiden Dreiecken abc und ABC

$$a = A$$
$$c = C$$

so ist $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

Zum Beweise mache man $AE = ac$ und ziehe $DE \parallel BC$,

so ist $\angle c = \angle AED$

und $\triangle abc \cong \triangle ADE$ (IV. §. 5)

und zugleich $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (§. 2).

Daher $\triangle abc \sim \triangle ABC$ (§. 1).

§. 5.

Zweiter Aehnlichkeitssatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen gleichen Winkel und zwei ihn einschließende proportionale Seiten haben. — **Beweis** ist dem vorigen ganz ähnlich. —

§. 6.

Dritter Aehnlichkeitssatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei proportionale Seiten und einen der größern Seite gegenüberliegenden gleichen Winkel haben. — **Beweis** ist ganz dem in 4 ähnlich.

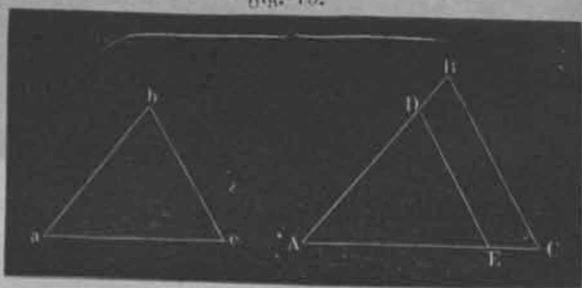
Bemerkung. Zwei Dreiecke, welche zwei proportionale Seiten und einen der kleinern Seite gegenüberliegenden gleichen Winkel haben, sind nicht nothwendig ähnlich, weil zwei Dreiecke mit denselben drei gleichen Stücken nicht nothwendig congruent sind, sondern ebensogut zwei Dreiecke sein können, in denen sich zwei gleichliegende Winkel zu zwei Rechten ergänzen. —

§. 7.

Vierter Aehnlichkeitssatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie drei gleichliegende proportionale Seiten haben.

Fig. 73.



Beweis: Wenn in den Dreiecken ABC und abc

$AB : AC : BC = ab : ac : bc$

so ist $\triangle ABC \backsim \triangle abc$.

Zum Beweise mache man $AD = ab$ und $AE = ac$ und ziehe DE, so ist $DE \parallel BC$ (Voraussetzung und Construction).

Daher 1. $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ (§. 2).

Da nun auch $ab : bc = AB : BC$ (Annahme)

und $AD : DE = AB : BC$ (nach 1)

so ist $bc = DE$.

Da nun außerdem $ab = AD$

und $ac = AE$

so ist 2. $\triangle abc \cong \triangle ADE$

endlich $\triangle ABC \backsim \triangle abc$.

Bemerkung. 1. Den vierten Satz spricht man auch so aus: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei gleiche Seitenverhältnisse haben. Wie läßt sich die eine Ausdrucksweise aus der andern herleiten? — 2. Ueber das Verhältniß der Aehnlichkeit zur Congruenz. Die Aehnlichkeit erfordert sowie die Gleichheit zwei gleiche Stücke, die Congruenz dagegen drei. Die Aehnlichkeitsbeweise sind überall directe Beweise, erfordern in allen Fällen dieselbe Hilfsconstruction (Construction eines Hilfsdreiecks)

und unterscheiden sich nur dadurch von einander, daß entweder erst die Aehnlichkeit des Hilfsdreiecks mit dem einen und dann die Congruenz desselben mit dem andern nachgewiesen wird, oder umgekehrt. —

Fragen über Specialisirung der Aehnlichkeitssätze.

Wann sind zwei rechtwinklige Dreiecke ähnlich? Wann sind zwei gleichschenklige Dreiecke ähnlich? Wann sind zwei gleichseitige oder zwei rechtwinklig gleichschenklige oder zwei gleichschenklige Dreiecke, in denen der Winkel an der Spitze 36^0 ist, einander ähnlich? —

§. 8.

Aehnliche Dreiecke im rechtwinkligen Dreieck und ihre Seitenverhältnisse.

a. Jedes rechtwinklige Dreieck zerfällt durch das Perpendikel aus dem rechten Winkel auf die Hypotenuse in zwei rechtwinklige Dreiecke, die dem ganzen Dreieck und unter sich ähnlich sind.

b. Die Katheten sind die mittleren Proportionalen zwischen (den anliegenden Abschnitten) ihren Projectionen und der Hypotenuse.

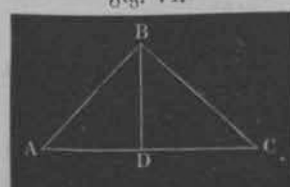
c. Das Perpendikel ist die mittlere Proportionale zwischen den Projectionen der Katheten (Abschnitten der Hypotenuse) auf die Hypotenuse. —

Beweis: Wenn $\triangle ABC$ bei B rechtwinklig und BD perpendikulär auf AC ist, so ist

a. $ABD \backsim ABC \backsim BDC$ (zwei gleiche Winkel)

und $\angle A = DBC$; $\angle C = DBA$.

Fig. 74.



Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD und ABC, sowie DBC und ABC folgen b. die beiden stetigen Proportionen $\begin{cases} AD : AB : AC \\ DC : BC : AC \end{cases}$ und aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ABD und BDC, c. die stetige Proportion $AD : BD : DC$.

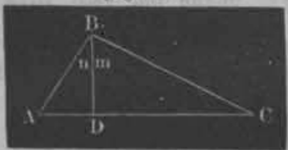
Bemerkung. Um den Schüler die drei stetigen Proportionen selbst finden zu lassen, verfahre man etwa so: Man schreibe die gleichliegenden Winkel in den Dreiecken ABC, ABD, BDC tabellarisch neben einander und unter sie die homologen Seiten; so findet der Schüler nicht nur leicht und mit Sicherheit alle neun möglichen Proportionen, sondern unter ihnen auch die fraglichen drei stetigen. —

§. 9.

Umkehrung des Satzes in 8.

Wenn in einem Punkte einer Linie ein Perpendikel errichtet ist, das die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Linie bildet, so ist das Dreieck, das durch die Verbindungslinien der Endpunkte der Linie und des Perpendikels entsteht, rechtwinklig. —

Fig. 75.



Beweis: Wenn $AD : BD : DC$

so ist $\angle ABC = R$.

Denn $\triangle ABD \sim \triangle BDC$ (§ 5).

Daher $A = m$

und $C = n$

Daher $A + C = m + n$.

Da nun $A + C + m + n = 2R$,

so ist $A + C = m + n = ABC = R$.

§. 10.

Die Anwendung von 8 und 9 auf den Halbkreis.

Wendet man 8 und 9 auf den Winkel im Halbkreise, auf Sehnen und Durchmesser an, so lautet Satz:

8 b. Jede Sehne im Halbkreise ist die mittlere Proportionale zwischen ihrer Projection und dem Durchmesser. Warum?

8 c. Jedes Perpendikel (Ordinate) im Halbkreise ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten des Durchmessers. Warum?

Bemerkung. 1. Die Beziehung, welche zwischen den Ordinaten (y) und den Abschnitten (x und $(d - x)$) des Durchmessers stattfindet, gibt als Gleichung des Kreises

a. $y^2 = (d - x)\, x$

wenn man den Endpunkt des Durchmessers als Anfangspunkt der Abscissen nimmt, und

b. $y^2 = (r + x)\,(r - x) = r^2 - x^2$,

wenn man den Mittelpunkt als Anfangspunkt der Abscissen nimmt. 2. Bei der Repetition kann Bemerkung 1 benutzt werden, um den Schüler auf die Grundaufgaben der analytischen Geometrie hinzuführen: aus der Gleichung die Eigenschaften und aus den Eigenschaften die Gleichung der Curven zu finden. —

9. Wenn man in jedem Punkte einer geraden Linie Perpendikel errichtet, und alle diese Perpendikel ohne Ausnahme mittlere Proportionalen zwischen den Abschnitten der Linie sind, so ist die Verbindungslinie aller dieser Punkte eine halbe Kreislinie und die gegebene Linie ihr Durchmesser.

Beweis: Denkt man sich von den Endpunkten der Perpendikel nach den Endpunkten der Linie und ihrem Mittelpunkte gerade Linien gezogen, so sind alle dadurch gebildeten Dreiecke rechtwinklig und alle nach dem Mittelpunkte gezogenen Linien der halben Linie (Hypotenuse) gleich, also alle Punkte des Umfanges gleichweit von dem Mittelpunkte entfernt, also die Figur ein Halbkreis.

Bemerkung. Der Beweis ist an einer Figur zu führen.

§. 11.

Verhältniß der Höhen, der Umfänge und Inhalte ähnlicher Dreiecke.

In zwei ähnlichen Dreiecken verhalten sich:

a. gleichliegende Höhen wie die zugehörigen Grundlinien,

b. die Umfänge wie gleichliegende Seiten,

c. die Inhalte wie die Quadrate gleichliegender Seiten. —

Beweis: Der Beweis zu a. folgt ganz einfach aus der Aehnlichkeit der durch die homologen Perpendikel gebildeten ähnlichen Dreiecke.

Der Beweis zu b. kann einfach so geführt werden: Sind A, B, C die Längenzahlen der Seiten des einen, a, b, c die Längenzahlen der homologen Seiten des andern ihm ähnlichen Dreiecks und ist $A : a = B : b = C : c = q$, so ist

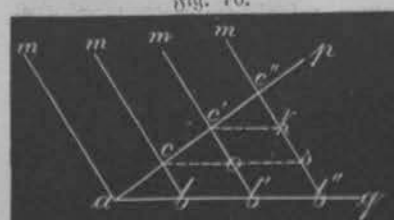
$$A = aq$$
$$B = bq$$
$$C = cq$$

Daher $A + B + C = (a + b + c)\, q$ und

$$\frac{A + B + C}{a + b + c} = q \text{ oder}$$

$$A + B + C : a + b + c = q = A : a = B : b = C : c.$$

Fig. 76.



Der Beweis zu c. wird mit Hilfe von a. so geführt: Wenn $\triangle ABC \sim \triangle abc$, und G und g, sowie H und h homologe Grundlinien und Höhen bedeuten, so ist

$G : g = H : h$ (nach a.)

aber $G : g = G : g$.

Daher $G^2 : g^2 = GH : gh = \frac{GH}{2} : \frac{gh}{2} = \triangle ABC : \triangle abc$ (VII. §. 6).

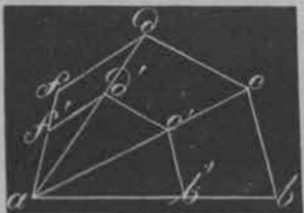
B. Aehnlichkeit der Vielecke.

§. 12.

Erklärung der Aehnlichkeit für Vielecke.

Zwei Vielecke heißen ähnlich, wenn sie aus gleich viel ähnlichen, gleichliegenden, in derselben Ordnung auf einander folgenden Dreiecken zusammengesetzt sind. —

Fig. 77.



Bemerkung. Zur Erläuterung zeichne man ein Vieleck, zerlege dasselbe auf irgend eine Weise in Dreiecke und zeichne aus ähnlichen in derselben Lage und Ordnung aufeinanderfolgenden Dreiecken ein ähnliches Vieleck. —

§. 13.

Allgemeiner Lehrsatz über die ähnlichen Vielecke.

Zwei ähnliche Vielecke haben gleichliegende gleiche Winkel und proportionale Seiten. —

Beweis: Diese Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus der Aehnlichkeit der einzelnen Dreiecke.

§. 14.

Allgemeine Bedingungen für die Aehnlichkeit.

Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn in ihnen alle gleichliegenden Winkel gleich und alle gleichliegenden Seiten proportional sind.

Beweis: Zerlegt man beide Figuren auf dieselbe Weise in Dreiecke, so läßt sich die Aehnlichkeit aller einzelnen gleichliegenden Dreiecke aus den Voraussetzungen so leicht nachweisen, daß die Ausführung mündlich an einer Figur geschehen kann.

§. 15.

Verhältniß der Umfänge ähnlicher Figuren.

Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie ein Paar gleichliegende Seiten oder Diagonalen. —

Beweis: Der Beweis ist dem für das Dreieck in §. 11 ähnlich.

§. 16.

Verhältniß der Flächen ähnlicher Figuren.

Die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten oder Diagonalen. — Bezeichnet man die ähnlichen Dreiecke in beiden Figuren der Reihe nach mit $A, B, C\ldots$ und $a, b, c\ldots$ und das Verhältniß zweier beliebigen gleichliegenden Seiten mit $M:m$, so ist, da alle gleichliegenden Seiten das Verhältniß $M:m$ haben,

$$A:a = B:b = C:c = D:d \text{ u. s. w.} = M^2:m^2$$

$$\text{und daher } \frac{A+B+C+D\ldots}{a+b+c+d\ldots} = M^2:m^2$$

§. 17.

Verallgemeinerung des pythagoräischen Lehrsatzes.

Wenn über den drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren construirt werden, so ist die Figur über der Hypotenuse den Figuren über den Katheten zusammengenommen gleich. —

Beweis: Sind P, p' und p'' die drei über der Hypotenuse c und den beiden Katheten a und b construirten ähnlichen Figuren, so ist $P:p':p'' = c^2:a^2:b^2$.

Da nun nach dem pythagoräischen Satze $c^2 = a^2 + b^2$, so ist auch $P = p' + p''$.

Fragen. Unter welchen Bedingungen sind zwei Parallelogramme ähnlich? Unter welchen zwei Trapeze? Unter welchen zwei Trapezoide? Unter welchen Bedingungen sind zwei Fünfecke ähnlich? Unter welchen Bedingungen im Allgemeinen zwei n Ecke, wenn zur Bestimmung der Aehnlichkeit vom Dreieck an gerechnet ein Stück weniger gehört, als zur Bestimmung der Congruenz.

Aufgaben.

1. Eine Linie einer andern gleichfalls gegebenen und getheilten Linie proportional zu theilen. —

Auflösung und Beweis ergibt sich leicht aus §. 2.

2. Zwei Linien zu finden, deren Summe und Verhältniß gegeben ist. In welchem Verhältniß steht diese Aufgabe zur vorigen?

3. Eine Linie in eine bestimmte Anzahl (3) von Theilen zu zerlegen, deren Verhältnißzahlen (2, 3, 5) gegeben sind. —

Auflösung und Beweis ergibt sich wie in 1 aus 3 und IV. (§. 22). Wie hat man zu verfahren, wenn die Verhältnißzahlen Brüche sind?

4. Zu drei Linien, deren Ordnung bestimmt ist, die vierte Proportionale zu finden. —

Auflösung und Beweis: Soll zu den drei Linien a, b, c die vierte Proportionale gefunden werden, so daß $a:b=c:x$ oder $x=\frac{bc}{a}$ ist, so zeichne man einen beliebigen Winkel und verfahre wie folgt:

a. Man schneide auf dem einen Schenkel die beiden ersten Linien (a, b) vom Scheitelpunkte aus ab und auf dem andern Schenkel die dritte Linie, verbinde die Endpunkte der ersten und dritten Linie durch eine Gerade und ziehe aus dem Endpunkte der zweiten Linie mit ihr eine Parallele, so ist der Abschnitt auf dem zweiten Schenkel bis zu ihr die gesuchte Proportionale. —

b. Man schneide auf dem einen Schenkel neben einander zwei Strecken ab, welche den beiden ersten Linien gleich sind, schneide auf dem andern Schenkel ein Stück ab, welches der dritten Linie gleich ist; verbinde die Endpunkte der ersten und dritten Linie, so ist die zweite Strecke auf dem andern Schenkel die gesuchte Proportionale. —

c. Man schneide die erste Linie auf dem einen Schenkel ab, ziehe von ihrem Endpunkte an den andern Schenkel eine Linie gleich der zweiten Linie, schneide die dritte Linie wieder auf dem ersten Schenkel ab und ziehe aus ihrem Endpunkte eine Parallele mit der zweiten gezeichneten Linie, so ist diese die verlangte Proportionale. —

Beweis: Der Beweis liegt ganz einfach bei sämmtlichen Auflösungen in Satz (4). —

Fragen: Wie wird man zu verfahren haben, wenn die beiden ersten Linien auf verschiedenen Schenkeln abgeschnitten werden? Welche Abänderungen sind sonst in der Zeichnung noch möglich? Welche Zeichnung gibt am wenigsten zu Irrthum Veranlassung? Bei welcher Zeichnung darf der Winkel nicht beliebig angenommen werden?

5. Zu zwei Linien die dritte Proportionale zu finden. Specieller Fall der vorigen Aufgabe. —

6. Zu zwei Linien die mittlere Proportionale zu finden. — In welchem Verhältniß steht diese Aufgabe zu der Aufgabe: „ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln?"

7. Zu einem Dreieck ein ähnliches Dreieck zu zeichnen.

8. Ueber einer gegebenen Linie, die einer bestimmten Seite eines Dreiecks homolog ist, ein Dreieck zu zeichnen, das dem gegebenen Dreieck ähnlich ist. —

Auflösung. Man zeichne zuerst die gegebene Linie und

a. an ihre Endpunkte zwei Winkel, die den homologen Winkeln des gegebenen Dreiecks gleich sind, so ist das Dreieck das verlangte ähnliche Dreieck. Oder:

b. an ihren einen Endpunkt einen Winkel, der dem homologen Winkel des gegebenen Dreiecks gleich ist, suche darauf die vierte Proportionale zu den beiden Schenkeln des homologen Winkels und der gegebenen Seite, schneide auf dem andern Schenkel des gezeichneten Winkels die gesuchte Proportionale ab, verbinde ihren Endpunkt mit dem Endpunkte der gegebenen Seite durch eine Gerade, so ist das dadurch gebildete Dreieck dem gegebenen ähnlich.

c. Wie hat man zu verfahren, wenn Satz (6) benutzt werden soll?

d. Wie aber, wenn Satz (7) zu benutzen ist?

Beweis: Der Beweis liegt ganz einfach in dem zur Zeichnung benutzten Aehnlichkeitssatze. — Welche Zeichnung ist die bequemste und warum?

9. Zu einem Vieleck ein ähnliches zu zeichnen.

10. Ueber einer gegebenen Linie, die einer bestimmten Seite eines Vielecks homolog ist, ein Vieleck zu zeichnen, das dem gegebenen ähnlich ist. —

11. Ein Vieleck zu zeichnen, das zwei gegebenen ähnlichen Vielecken ähnlich und ihrer Summe gleich ist. —

12. Aehnliche Aufgabe für die Zeichnung eines Vielecks, das der Differenz zweier ähnlichen Vielecke gleich ist.

13. Ein Vieleck zu zeichnen, das das $n$fache oder $\frac{1}{n}$ eines gegebenen ähnlichen Vielecks ist. —

Uebungsaufgaben.

1. Ein Dreieck, das durch drei Perpendikel, die auf den drei Seiten eines gegebenen Dreiecks errichtet sind, gebildet wird, ist dem gegebenen Dreieck ähnlich. Warum? Wann entsteht kein Dreieck?

2. Zieht man aus der Spitze des Dreiecks nach der Gegenseite zwei gerade Linien, so daß jede von ihnen mit der Gegenseite einen Winkel bildet, der gleich ist dem Winkel, von dessen Spitze beide Linien auslaufen, so sind die Dreiecke dem gegebenen Dreieck und unter sich ähnlich. Warum?

3. Wenn ein senkrechter Stab von 4′ Höhe einen Schatten von 1′ 5″ wirft, wie hoch ist ein Thurm, dessen Schatten zu derselben Zeit 80′ 6″ beträgt? —

4. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete $= a$ und ihre Projection auf die Hypotenuse $= m$ ist, wie groß sind die andern Seiten und das Perpendikel? Wie groß sind die gesuchten Linien, wenn $a = 5'$ und $m = 3'$ ist? —

5. Wie groß sind die Seiten und der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Abschnitte auf der Hypotenuse m und n (oder 3′ 5″ und 4′ 7″) sind? —

6. Zwei homologe Seiten zweier ähnlichen Dreiecke sind 20′ und 18′, wie groß ist Umfang oder Inhalt des zweiten, wenn der Umfang oder Inhalt des ersten 400′ im Längenmaß oder Flächenmaß ist? —

Elfter Abschnitt.

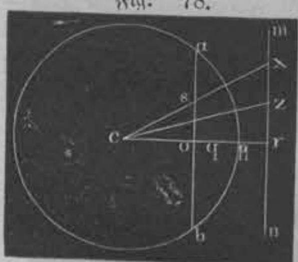
Von Winkeln und Linien in und am Kreise.

§. 1.

Verschiedenheit der Linien in Bezug auf den Kreis.

In Bezug auf einen bestimmten Kreis kann eine Linie nur drei verschiedene Lagen haben, sie kann

Fig. 78.



a. ganz außerhalb des Kreises liegen, ohne einen Punkt mit dem Kreise gemein zu haben,

b. ganz außerhalb des Kreises liegen und nur einen Punkt mit dem Kreise gemein haben,

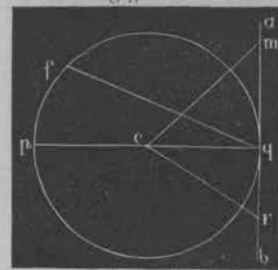
c. zum Theil innerhalb, zum Theil außerhalb des Kreises liegen und nur zwei Punkte mit der Peripherie gemein haben. Die ersteren Linien führen keinen besonderen Namen, die zweiten heißen (berührende) Tangenten, die dritten Secanten und ihre Abschnitte innerhalb des Kreises Sehnen (Chorden), wie früher erklärt ist.

§. 2.

Bedingungen für diese Lagen.

a. Eine Linie liegt ganz außerhalb des Kreises, wenn ihre Entfernung vom Mittelpunkte größer als der Radius ist. Denn dann ist jede andere Linie vom Mittelpunkte an die Linie gezogen als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks noch größer, als das Perpendikel, also jeder Endpunkt dieser Linie oder jeder Punkt der gegebenen Linie außerhalb des Kreises.

Fig. 79.



b. Eine Linie ist eine Tangente, wenn ihre Entfernung vom Mittelpunkte dem Radius gleich ist, oder wenn sie auf dem Endpunkte eines Radius winkelrecht steht. Warum?

c. Eine Linie ist eine Secante, wenn ihre Entfernung vom Mittelpunkte kleiner als der Radius ist. Warum?

§. 3.

Folgerungen aus der Lage der Linien.

a. Wenn eine Linie eine Tangente ist, so ist das Perpendikel im Mittelpunkte ein Radius und umgekehrt, der Radius aus dem Berührungspunkte ein Perpendikel. Warum?

b. Eine Secante schneidet die Peripherie nur in zwei Punkten, da nur zwei, dem Radius gleiche Linien auf beiden Seiten ihres Perpendikels vom Mittelpunkte gezogen werden können. Warum?

§. 4.

Verschiedenheit der Winkel in Bezug auf den Kreis.

In Bezug auf einen bestimmten Kreis kann ein Winkel eine zweifache Lage haben; seine Spitze kann nämlich entweder der Mittelpunkt oder irgend ein anderer Punkt des Kreises sein. Jene Winkel heißen centrische (Centri-), diese excentrische Winkel. Die Spitzen der excentrischen Winkel können in der Peripherie, außerhalb oder innerhalb derselben liegen, und ihre Schenkel Sehnen, Secanten oder Tangenten sein. Von diesen Winkeln sind besonders die Peripherie-Winkel wichtig, d. h. die Winkel, deren Spitzen in der Peripherie liegen, und deren beide Schenkel Sehnen sind. Die anderen Winkel führen keine besonderen Namen.

Fragen: Wie würde demnach die vollständige Eintheilungstabelle der Winkel in Bezug auf den Kreis sich gestalten, wenn Lage der Spitze und Beschaffenheit der Schenkel zugleich berücksichtigt wird?

A. Von den Winkeln im und am Kreise.

§. 5.

Erklärung.

Von einem Peripherie- und Centri-Winkel sagt man, sie stehen auf dem Bogen, der zwischen ihren Schenkeln liegt; von einem Peripherie-Winkel sagt man außerdem, er stehe in dem Bogen, in dem seine Spitze liegt, oder er sei ein Winkel desjenigen Abschnitts, in dem Schenkel und Spitze liegen. — Erläuterung an einer Figur. Fragen: Wozu ergänzen sich die beiden Bogen, in welchem und auf welchem ein Peripherie-Winkel steht? Wie viele Centri-Winkel stehen auf einem Bogen und warum? Wie verhalten sich Centri-Winkel auf gleichen Bogen?

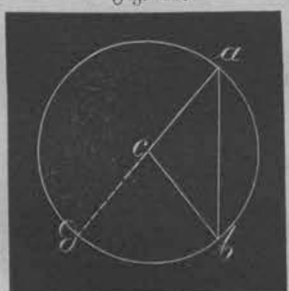
§. 6.

Verhältniß der Peripherie- und Centri-Winkel.

Der Peripherie-Winkel ist die Hälfte des Centri-Winkels, mit dem er auf demselben Bogen steht.

Fallbestimmung und Beweis: Wenn dcb ein Centriwinkel und bad ein Peripherie-Winkel auf dem Bogen db, so ist $bad = \frac{1}{2}\, dcb$ oder $dcb = 2\, bad$. Die Spitze des Centri-Winkels kann in Bezug auf den Peripherie-Winkel nur drei verschiedene Lagen haben; sie kann

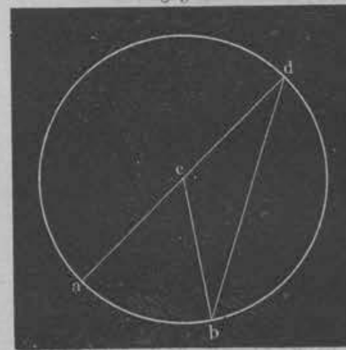
Fig. 80.



a. in einem Schenkel
b. zwischen beiden Schenkeln
c. außerhalb beider Schenkel
} des Peripherie-Winkels liegen.

Beweis zu a. Liegt die Spitze in einem Schenkel des Peripherie-Winkels, wie in beistehender Figur,

Fig. 81.

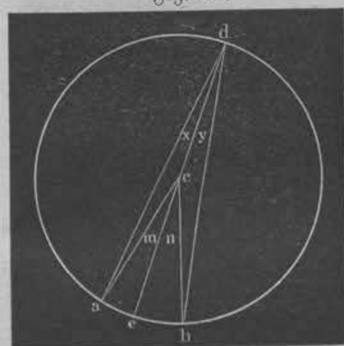


so ist $acb = adb + dbc$
aber $adb = dbc$

daher $acb = 2\, adb$ oder $adb = \frac{1}{2}\, acb$.

Beweis zu b. Liegt die Spitze c zwischen den Schenkeln des Peripherie-Winkels, wie in beistehender Figur, so ziehe man durch c noch de,

Fig. 82.

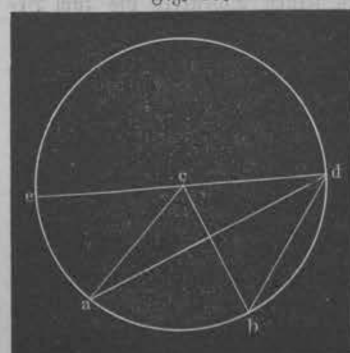


dann ist $m = 2x$
$n = 2y$.

Daher $m + n = 2(x + y)$ oder
$acb = 2(adb)$.

Beweis zu c. Liegt die Spitze außerhalb der Schenkel, wie in beistehender Figur, so ziehe man wieder wie in b durch c noch de, dann ist

Fig. 83.



$ecb = 2\, edb$ (nach a.)
$eca = 2\, eda$.

Daher $ecb - eca = 2\,(edb - eda)$
oder $acb = 2\, adb$.

Fragen: Wie ist der Beweis zu b und c geführt? Wie würde der Beweis zu führen sein, wenn der Centriwinkel ein gestreckter oder ein convexer ist?

§. 7.

Folgerungen, Größe der Peripherie-Winkel.

a. Peripherie-Winkel auf demselben oder auf gleichen oder in gleichen Bogen u. s. w. in einem und demselben oder in gleichen Kreisen sind einander gleich. Warum?

b. Gleiche Peripherie-Winkel stehen auf gleichen Bogen. Warum?

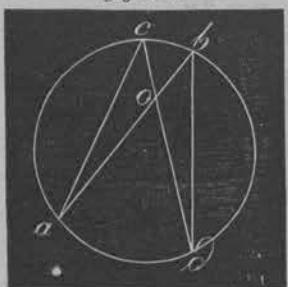
c. Ein Peripherie-Winkel ist spitzer, stumpfer oder rechter Winkel, je nachdem der Bogen, auf dem er steht, kleiner, größer oder ebenso groß, als die halbe Peripherie ist. — Wie groß ist die Summe zweier Peripherie-Winkel, die auf der ganzen Kreisperipherie stehen?

§. 8.

Größenverhältniß der Peripherie-Winkel zu den anderen excentrischen Winkeln.

a. Ein excentrischer Winkel, dessen Spitze innerhalb des Kreises liegt, und dessen Schenkel zwei sich durchschneidende Sehnen sind, ist der Summe der beiden Peripherie-Winkel gleich, die auf seinem und seines Scheitelwinkels Bogen stehen.

Fig. 84.

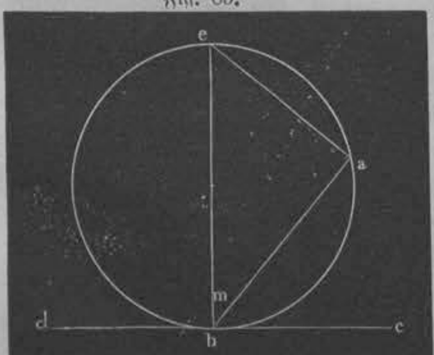


Beweis: Der excentrische Winkel aod in beistehender Figur ist dem Peripherie-Winkel auf ad plus dem Peripherie-Winkel auf bc gleich. Denn zieht man ac oder db, so ist

$abd + bdc = aod$ u. s. w.

b. Ein excentrischer Winkel, dessen Spitze in der Peripherie liegt, und der zum einen Schenkel eine Sehne, zum anderen Schenkel aber eine Tangente hat, ist dem Peripherie-Winkel desjenigen Bogens gleich, der zwischen seinen Schenkeln bis zum Berührungspunkte liegt.

Fig. 85.



Beweis zu b.: Wenn dc eine Tangente, b der Berührungspunkt und ba eine Sehne, so ist

α) abc = Peripherie-Winkel auf ab und

β) abd = Peripherie-Winkel auf bea.

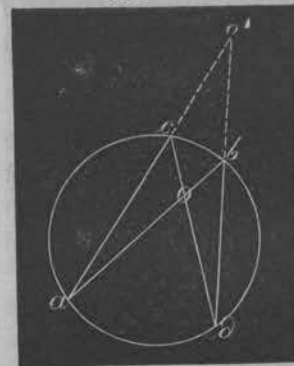
Zum Beweise ziehe man den Durchmesser be und die Sehne ea, so ist Dreieck eab rechtwinklig und

$$e + m = R. \text{ Da nun}$$
$$m + abc = R.$$
$$\text{so ist } e + m = m + abc$$

und daher $e = abc$ d. h. Peripheriewinkel auf ab = W. abc.

Warum ist der Peripherie-Winkel auf abe dem Winkel abd gleich?

Fig. 86.



c. Ein excentrischer Winkel, dessen Spitze außerhalb des Kreises liegt, und dessen Schenkel Secanten oder Tangenten sind, ist jedenfalls dem Unterschiede der beiden Peripherie-Winkel gleich, die auf den durch die Durchschnittspunkte oder Berührungspunkte gebildeten Bogen stehen. Der Beweis wird in allen Fällen leicht mit Hilfe von a und b geführt.

§. 9.

Winkel zweier sich durchschneidenden Kreisbogen.

Wenn zwei Kreisbogen sich durchschneiden, so ist ihr Winkel im Durchschnittspunkte gleich dem Winkel ihrer Tangenten.

Beweis: Wenn zwei gerade Linien sich schneiden, so ist ihr Winkel in allen ihren Punkten derselbe, da die Linien ihre Richtung nie ändern. Wenn zwei Kreisbogen sich durchschneiden, so ist ihr Winkel in jedem Punkte ihres Laufes ein anderer, da sie in jedem Punkte ihre Richtung ändern. Da nun im Durchschnittspunkte die Richtungen beider Bögen durch die Tangenten ausgedrückt werden, so ist ihr Winkel gleich dem Winkel ihrer Tangenten.

§. 10.

Aufgaben.

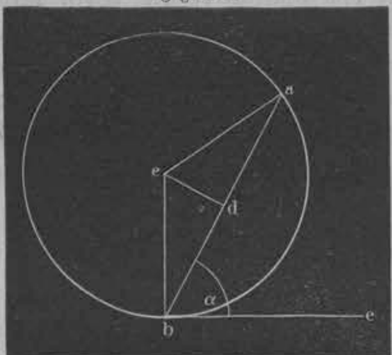
1. Die Hälfte eines gegebenen Winkels zu zeichnen, ohne ihn zu halbiren.
2. Das Doppelte eines Winkels zu zeichnen, ohne ihn zu verdoppeln.
3. Ueber einer Linie einen rechten Winkel zu zeichnen.
4. Wenn man in einem Kreise einen Durchmesser zieht, von seinen Endpunkten aus auf einer Seite desselben Bogen von 40 und 45 Grad abschneidet und ihre Endpunkte durch gerade Linien verbindet und sie bis zum

Durchschnittspunkte verlängert, wie groß sind sämmtliche dadurch gebildete centrische und excentrische Winkel?

5. Ueber einer Linie einen Kreis zu zeichnen, so daß jeder über derselben stehende Peripherie-Winkel einem gegebenen Winkel gleich ist.

Auflösung. Ist ab die gegebene Linie, so trage man an ihren Endpunkt b den Winkel $abc = x$, errichte in b und dem Halbirungspunkte d der Linie ab zwei Perpendikel bis zu ihrem Durchschnittspunkte e, so ist dies der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Fig. 87.



Beweis: Denn der Kreis geht durch a und b, da $eb = ea$, bc ist an ihm eine Tangente (§. 2) und daher Peripherie-Winkel auf ab = Winkel α.

B. Von den Linien im und am Kreise.

§. 11.

Radiendreiecke.

Durch jede Sehne im Kreise und die von ihren Endpunkten gezogenen Radien entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, von dem dieselben Sätze nur mit verändertem Ausdruck gelten, die früher (IV., 19) vom gleichschenkligen Dreiecke überhaupt nachgewiesen sind. Wie heißen sie auf das Radiendreieck angewandt?

§. 12.

Gleiche Sehnen bedingen gleiche Entfernung vom Mittelpunkte.

Gleiche Sehnen haben gleiche Entfernung vom Mittelpunkte und umgekehrt. Oder: durch die Sehnen ist ihre Entfernung gegeben und umgekehrt.

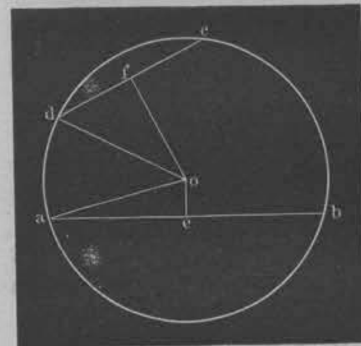
Beweis folgt leicht aus der Congruenz der Radien-Dreiecke.

§. 13.

Ungleiche Sehnen bedingen ungleiche Entfernungen.

Bei ungleichen Entfernungen hat die kleinere Sehne die größere Entfernung und umgekehrt.

Fig. 88.



Beweis: Construirt man zu beiden Sehnen die Entfernungen und einen zugehörigen Radius an den Endpunkt, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke mit gleichen Hypotenusen und ungleichen Katheten. Demnach ist

$$df^2 + fo^2 = ae^2 + oe^2.$$

Zieht man nun auf beiden Seiten

$$df^2 < ae^2 \text{ ab,}$$

$$\text{so bleibt } fo^2 > oe^2$$

$$\text{daher } fo > oe.$$

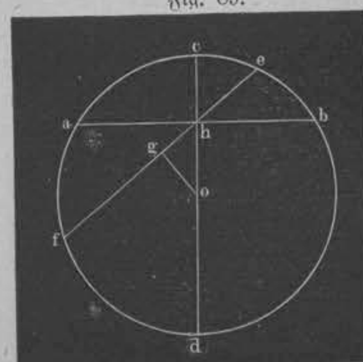
Der Beweis zur Umkehrung ist dem voranstehenden ähnlich.

§. 14.

Größte und kleinste Sehnen durch einen Punkt.

Von allen Sehnen, die durch einen Punkt gezogen werden können, ist der Durchmesser die größte und die auf ihm senkrechte Sehne die kleinste.

Fig. 89.



Beweis: Daß der Durchmesser die größte Sehne ist, folgt aus der Entstehung des Kreises; daß die auf ihm senkrechte Sehne ab die kleinste ist, d. h. kleiner ist, als jede andere Sehne ef, folgt aus 3. wenn man die Entfernung der Sehne fe durch das Perpendikel go construirt und berücksichtigt, daß im rechtwinkligen Dreiecke goh $ho > go$ und daher $ab < fe$ ist.

§. 15.

Parallele Sehnen.

Parallele Sehnen schließen gleiche Bogen ein. Wie muß die Umkehrung lauten, wenn sie unbedingte Gültigkeit haben soll?

Beweis wird durch Zeichnung einer Verbindungslinie mit Hilfe des Satzes über die Peripherie-Winkel geführt.

Fragen: Wie wird der Satz lauten, wenn keine oder beide parallele Sehnen Tangenten werden? Was gilt von dem Perpendikel, welches im Halbirungspunkte der einen Sehne errichtet ist? Wie könnte der Beweis zu (8 b) leicht mit Hilfe dieses Satzes geführt werden?

§. 16.

Der pythagoräische Lehrsatz auf Linien im Halbkreise angewandt.

a. Jede Sehne, vom Endpunkte eines Durchmessers aus gezogen, ist die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und ihrer Projection auf ihn.

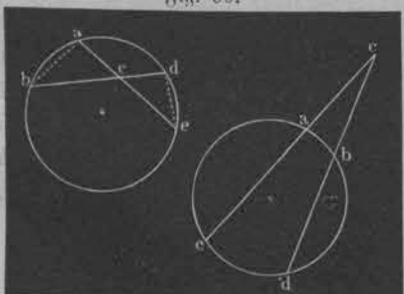
b. Jedes Perpendikel auf dem Durchmesser ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten desselben. Wie lauten die Sätze für die Quadrate der Sehne und des Perpendikels?

§. 17.

Proportionen oder Rechtecke aus Sehnen, Secanten und Tangenten.

a. Wenn sich zwei Sehnen oder Secanten schneiden, so bilden ihre Abschnitte, vom Scheitelpunkte aus gerechnet, eine Proportion, wenn die Abschnitte der einen Sehne zu inneren und die der anderen zu äußeren Gliedern der Proportion gemacht werden.

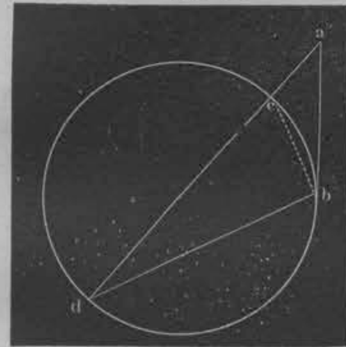
Fig. 90.



Beweis. Wird sehr leicht aus der Aehnlichkeit der Dreiecke an den beistehenden Figuren abgeleitet.

b. Wenn sich eine Tangente und Secante schneiden, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Secante.

Fig. 91.



Beweis: Wenn ab eine Tangente und ad eine Secante, so ist $ac : ab : ad$. Denn zieht man noch cb und db, so ist $\triangle\, acb \sim abd$ (X. §. 4). Daher $ac : ab = ab : ad$.

Wie verhalten sich zwei Tangenten zu einander, die von einem Punkte aus an den Kreis gezogen sind?

Fragen: Hätte b nicht unmittelbar als specieller Fall aus a gefolgert werden können? Unter welcher allgemeinen Form lassen sich beide Sätze aussprechen? Wie lauten die Sätze a und b, wenn man nicht von Proportionen der Abschnitte, sondern von den durch sie gebildeten Rechtecken oder Quadraten redet? Zur Lösung welcher Aufgaben geben diese Sätze neue Lösungen an die Hand?

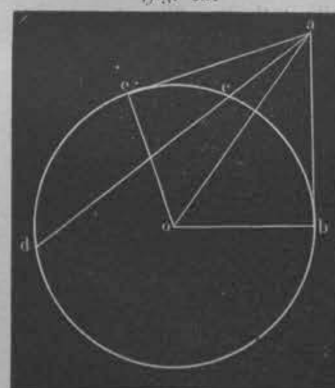
§. 18.

Umkehrung von 17, b.

Wenn von einem Punkte aus eine Secante und noch eine andere Linie an den Kreis gezogen wird und diese die mittlere Proportionale zu den Abschnitten der Secante ist, so ist sie eine Tangente an den Kreis.

Beweis: Wenn $ac : ab = ab : ad$
so ist ab eine Tangente.

Fig. 92.



Denn zieht man eine Tangente ae an den Kreis und außerdem die Radien eo und ob und die Centrale oa, so ist
$ac : ea = ea : ad$ (nach der Construction)
und $ac : ab = ab : ad$ (nach der Annahme)
daher $ea = ab$.
Da nun $eo = ob$
$ao = ao$
so ist $\triangle aeo \cong \triangle aob$
daher W. $abo = aeo$.
Da nun W. $aeo = R$, so ist auch $abo = R$ oder ab eine Tangente.

§. 19.

Gleichheit von Centri-Winkeln und zugehörigen Stücken.

a. Wenn zwei Centri-Winkel gleich sind, so sind auch die zu ihnen gehörigen Bogen, Sehnen, Ausschnitte und Abschnitte gleich.

b. Wenn zwei Bogen gleich sind, so sind auch die Centri-Winkel und die übrigen zugehörigen Stücke gleich.

c. Wenn zwei Sehnen gleich sind, so sind auch die Centri-Winkel und die übrigen zugehörigen Stücke gleich.

Beweis: Der Beweis wird in allen drei Sätzen sehr leicht aus der Congruenz der Dreiecke und den Grundeigenschaften des Kreises geführt.

Fragen: In welchem Verhältnisse stehen die Sätze b und c zu a? Wie würden die beiden fehlenden Umkehrungen zu a lauten? Auf welche Weise könnte man ihre Richtigkeit leicht indirekt aus der Natur des Kreises beim Aufeinanderlegen ableiten?

§. 20.

Verhältniß von ungleichen Centri-Winkeln und zugehörigen Bogen.

Ungleiche Centri-Winkel verhalten sich wie die ihnen zugehörigen Bogen und umgekehrt.

Beweis: Zum Beweise denke man sich jeden Bogen (B, b) durch den unendlich kleinen Bogen getheilt und durch alle Theilpunkte Radien gezogen, so werden dadurch auch die Centri-Winkel (C, c) in ebenso viele, unter sich gleiche Theile getheilt. Nimmt man nun an, daß die Bogen B und b m und n solcher Theile enthalten,

so ist $B : b = m : n$

aber auch $C : c = m : n$

daher $B : b = C : c$.

Fragen: Verhalten sich die Centri-Winkel auch wie die ihnen zugehörigen Sehnen? Welche Bedeutung hat unser Satz für die Winkelmessung? Durch welchen Bogen wird demnach ein Centriwinkel gemessen? Durch welchen Bogen ein Peripherie-Winkel? Durch welchen Bogen ein excentrischer Winkel im Kreise? Durch welchen Bogen ein excentrischer Winkel außerhalb des Kreises? Durch welchen Bogen ein Winkel, der durch Sehne und Tangente gebildet wird?

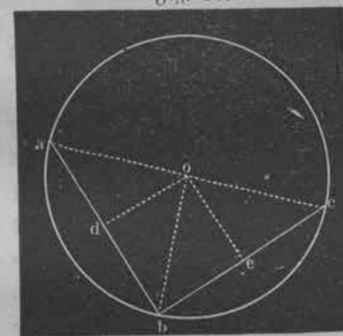
§. 21.

Aufgaben.

1. **Einen Kreis durch drei Punkte zu legen, die nicht in gerader Linie liegen.**

Auflösung und Beweis. Soll ein Kreis durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte (a, b, c) gelegt werden, so verbinde man die drei Punkte durch zwei gerade Linien, halbire dieselben, errichte in ihren Halbirungspunkten Perpendikel und verlängere sie bis zum Durchschnittspunkte, so ist dies der Mittelpunkt und eine der von ihm aus zu den gegebenen Punkten gezogenen Geraden der Radius des gesuchten Kreises.

Fig. 93.



Der Beweis für die Lage aller drei gegebenen Punkte in der Peripherie oder für die Gleichheit der vom Durchschnittspunkte der Perpendikel aus gezogenen Linien folgt leicht aus der Congruenz der Dreiecke.

Fragen: Wie viel Kreise sind durch einen Punkt möglich? Wie viel Kreise durch zwei Punkte? Wie müssen die Mittelpunkte dieser Kreise liegen? Warum ist durch drei in gerader Linie liegende Punkte kein Kreis möglich? Warum ist durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte jedesmal ein Kreis möglich? Warum aber nur ein Kreis? Um welche Figur ist ein Kreis unbedingt möglich? Welche drei Linien eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte?

2. **Den Mittelpunkt eines Kreises zu suchen.**

Auflösung und Beweis: a. Man ziehe eine Sehne, errichte in ihrem Halbirungspunkte auf beiden Seiten ein Perpendikel bis zur Peripherie, so ist der Halbirungspunkt des Perpendikels der gesuchte Mittelpunkt des Kreises. Warum?

b. Man ziehe zwei Sehnen, errichte in ihren Halbirungspunkten Perpendikel bis zum Durchschnittspunkte, so ist dies der gesuchte Mittelpunkt. Warum?

3. **Eine Linie als Sehne in einen Kreis von einem gegebenen Punkte aus einzutragen.** —

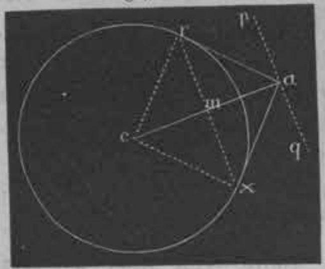
Auflösung und Beweis: Soll eine Linie von einem Punkte in der Peripherie als Sehne eingetragen werden, so beschreibe man mit ihr aus dem gegebenen Punkte einen Kreis und nach den Durchschnittspunkten beider Kreise gerade Linien, so sind dies die verlangten Sehnen. Warum?

Fragen: Wann ist die Aufgabe unmöglich? Wann läßt die Aufgabe nur eine Lösung zu?

4. An einen Punkt der Peripherie eine Tangente zu ziehen. Die Auflösung folgt unmittelbar aus der Erklärung und der Bedingung für die Tangente in XI. §. 2.

5. Von einem Punkte außerhalb des Kreises an den Kreis eine Tangente zu ziehen.

Fig. 94.



Auflösung und Beweis: Soll durch einen Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis eine Tangente gezogen werden, so ziehe man die Centrale des gegebenen Punktes und construire über ihr einen Kreis, der den gegebenen Kreis in zwei Punkten schneidet. Beide Linien, welche zu den Durchschnittspunkten von dem gegebenen Punkte gezogen werden, sind die gesuchten Tangenten, sowie die Durchschnittspunkte selbst ihre Berührungspunkte. Der Beweis liegt in der Rechtwinkligkeit der Dreiecke über der Centrale.

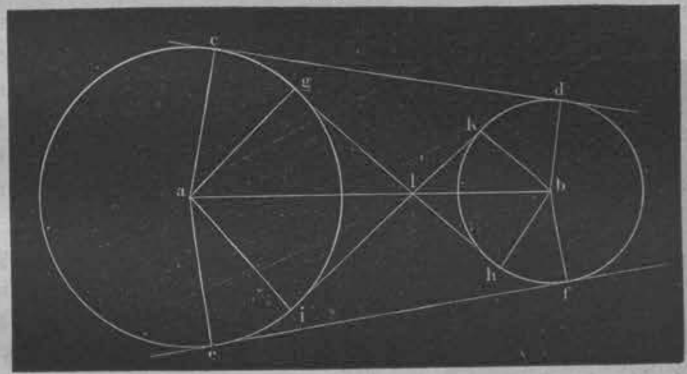
Fragen: Durch welche einfache Betrachtung kann man die Lösung finden? Wie verhalten sich die beiden Tangenten? Wie groß ist der durch sie gebildete Winkel? Welche Eigenschaften hat die Centrale in Bezug auf die durch die Tangenten und Berührungsradien gebildeten Winkel? Was für ein Viereck bilden Tangenten und Berührungsradien? Welche Lage hat die Berührungssehne gegen die Centrale? Welchen Rechtecken sind die Quadrate der Tangenten, Radien und halben Berührungssehne gleich? Zu welchen Linien sind demnach Radien, Tangenten und halbe Berührungssehnen mittlere Proportionalen? Wie liegen die Berührungspunkte, wenn der gegebene Punkt in unendlicher Entfernung liegt und was sind in diesem Falle die Tangenten?

Bemerkung und Erklärung. Bei der Repetition kann der Lehrer die Gelegenheit benutzen, dem Schüler die wichtigen Begriffe von Polen und Polaren zu erklären, da sie an dieser Stelle gleichsam von selbst hervortreten. Zieht man nämlich von dem Mittelpunkte des Kreises auf irgend eine gerade Linie, z. B. pq eine Senkrechte ca und schneidet auf ihr vom Mittelpunkte aus die dritte Proportionale zu ihr und dem Radius ab, so daß sich $ca : cx = cx : cm$ verhält, so heißt m der Pol der Linie pq und sie selbst Polare des Punktes m. Errichtet man in m die Senkrechte rx, so ist auch umgekehrt $cm : cx = cx : ca$ und daher a der Pol zu

der Polaren rx. — Beide Punkte heißen daher in Bezug auf einander conjungirte Pole. — Wie findet man demnach zu einer Geraden den Pol und zu einem Pole die zugehörige Polare.

6. An zwei Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Fig. 95.

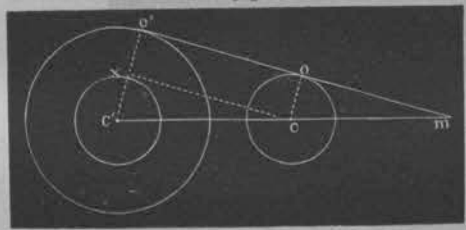


Erklärung. Die gemeinschaftlichen Tangenten an zwei verschiedene Kreise schneiden die Centrale entweder selbst oder deren Verlängerung; im ersteren Falle heißen sie innere, im anderen äußere Tangenten. Wichtigkeit der gemeinschaftlichen Tangenten in der praktischen Mechanik zur Uebertragung und Leitung von Bewegungen.

Auflösung und Beweis:

a. Zeichnung einer äußeren Tangente. Soll an zwei Kreise eine äußere Tangente gezogen werden, so ziehe man ihre Centrale, construire in dem größern Kreise einen concentrischen Kreis mit dem Unterschiede der beiden Radien und an diesen Kreis eine Tangente aus dem Mittelpunkte des kleineren Kreises.

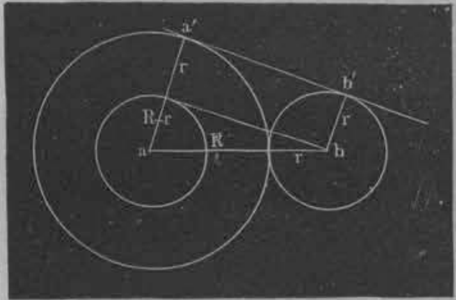
Fig. 96.



Zieht man nun noch durch den Berührungspunkt (x) den Radius ($c'o'$) und mit ihm parallel und gleichgerichtet den Radius (co), so ist die Verbindungslinie (oo') der beiden Endpunkte der Radien (o und o') die verlangte Tangente. — Aus der Auflösung folgt unmittelbar, daß die durch die Radien gebildete Figur ($o'xoc$) ein Rechteck und daher ihre Verbindungslinie oo' eine Tangente (in o und o') an die beiden Kreise ist.

Fragen: Wie liegt die Tangente, wenn beide Kreise gleich sind und wie groß ist sie in diesem Falle? Wie viele äußere Tangenten sind möglich und wie verhalten sie sich? Wo liegt der Durchschnittspunkt der Tangenten mit der Centrale, wenn die Kreise gleich sind? Wie viele Tangenten sind möglich und wie verhalten sie sich? Wenn man eine Tangente bis zum Durchschnittspunkte mit der Centrale verlängert, was für Dreiecke werden dadurch gebildet und welche Proportionen ergeben sich daraus? Kann man

Fig. 97.

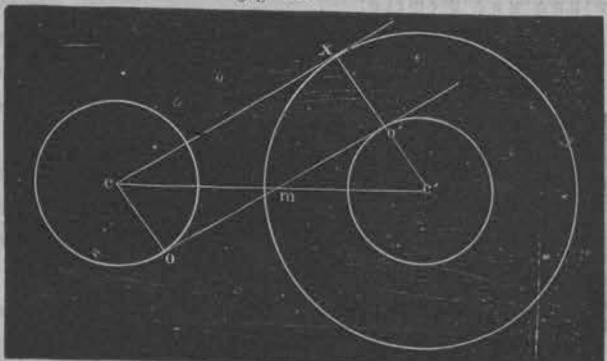


dadurch den Durchschnittspunkt der Centrale und Tangente finden und darauf eine andere Auflösung stützen? Wie läßt sich mit Hilfe von nebenstehender Figur durch den pythagoräischen Lehrsatz der Beweis zu dem Satze liefern: die gemeinschaftliche äußere Tangente an zwei sich von außen berührende Kreise ist die mittlere Proportionale zu ihren Durchmessern.

b. Zeichnung einer innern Tangente.

Soll an zwei Kreise eine innere Tangente gezogen werden, so zeichne man einen concentrischen Hilfskreis mit der Summe der Radien und an ihm

Fig. 98.



wieder eine Tangente aus dem Mittelpunkte des andern Kreises. Zieht man nun noch durch den Berührungspunkt den Radius xc' und mit ihm parallel und in entgegengesetzter Richtung den Radius co, so ist die Verbindungslinie u. s. w. die gesuchte Tangente. — Der Beweis ist dem vorigen ganz analog.

Fragen: Wo liegt der Durchschnittspunkt der Centrale und der Tangente, wenn die Kreise gleich sind? Was für Dreiecke entstehen durch Centrale, Radien und Tangente, und welche Proportionen ergeben sich aus ihnen u. s. w.? An welche excentrischen Kreise giebt es vier, an welche drei, zwei, eine und gar keine gemeinschaftliche Tangenten? Wenn man beide Tangenten, sowohl innere als äußere, und die Centrale zieht, wo liegt der Durchschnittspunkt der Tangenten und wie folgt dies aus der Beschaffenheit der congruenten Dreiecke? Die Durchschnittspunkte der Tangenten und Centrale heißen innere und äußere Aehnlichkeitspunkte. —

Bemerkung und Erklärung. Bei der Repetition kann auf die harmonische Theilung der Centrale durch die Aehnlichkeitspunkte hingewiesen werden, um an dieser Stelle auch das von der harmonischen Proportion und von der harmonischen Theilung im Allgemeinen mitzutheilen, was für elementare Aufgaben von Wichtigkeit ist. Was unter einer harmonischen Proportion verstanden wird, ist im Leitfaden der Arithmetik Seite 67 kurz auseinandergesetzt. Unter der harmonischen Theilung einer Linie, Figur, versteht man diejenige Dreitheilung, bei der das Produkt (oder Rechteck) aus den beiden äußeren Abschnitten gleich ist dem Producte aus der ganzen Linie

Fig. 99.

und dem mittleren Abschnitte, oder bei welcher der erste Abschnitt zum zweiten sich wie die ganze Linie zum dritten Abschnitte verhält. Z. B. die Linie ad ist durch die Punkte b und c harmonisch getheilt, wenn $ab : bc = ad : dc$. Schreibt man diese Proportion in folgender Weise $ad : cd = ad - bd : bd - cd$, so bilden die drei Linien ad, bd, cd eine stetige harmonische Proportion, was den Namen harmonische Theilung veranlaßt hat.

7. Die vierte Proportionale zu drei Linien zu finden oder ein Rechteck in ein anderes mit vorgeschriebener Seite zu verwandeln.

8. Die mittlere Proportionale zu zwei Linien zu suchen oder ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

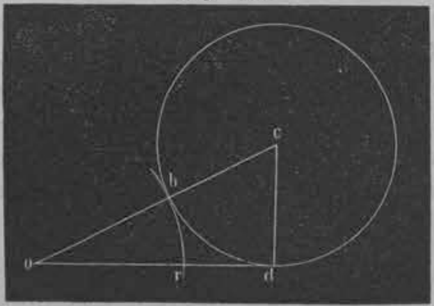
Auflösung. Beide Aufgaben sollen hier mit Anwendung des Sehnen- und Tangentensatzes (7) gelöset werden.

9. Eine Linie stetig zu theilen.

Eine Linie heißt stetig oder nach stetiger Proportion getheilt, wenn der eine Theil die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem anderen Theile ist, oder wenn das Quadrat des einen Theiles dem Rechtecke aus dem andern Theile und der ganzen Linie gleich ist. Der größere Theil oder die mittlere Proportionale heißt die Mediane der getheilten Linie. Die alten Mathematiker nannten diese Theilung einer Linie wegen ihrer Wichtigkeit den goldenen Schnitt (sectio divina oder aurea).

Auflösung und Beweis:

Fig. 100.



Soll die Linie od stetig getheilt werden, so errichte man in d ein Perpendikel $cd = \frac{1}{2}\, od$, beschreibe aus d mit cd einen Kreis und ziehe die Centrale oc. Trägt man endlich $or = ob$ auf od von o aus ab, so ist durch r die Linie od stetig getheilt. —

Denn $od^2 = ob\,(ob + od)$ (Tangentensatz)

$= ob^2 + ob\,.\,od = or^2 + or\,.\,od$

Da nun $od^2 = or\,.\,od + rd\,.\,od$

so ist $or\,.\,od + rd\,.\,od = or^2 + or\,.\,od$

oder $rd\,.\,od = or^2$

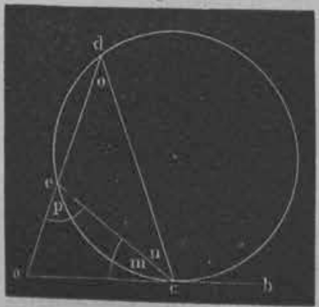
oder $rd\,.\,or = or : od$.

Bemerkung. Adolf Zeising glaubt die stetige Theilung in den Grundproportionen des menschlichen Körperbaues, sowie in den Längen-, Breiten- und Höhen-Verhältnissen der schönsten griechischen und egyptischen Bauwerke als Grundverhältniß entdeckt zu haben.

10. **Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren, dessen Winkel an der Spitze die Hälfte des Winkels an der Basis ist.**

Auflösung und Beweis: Soll ein gleichschenkliges Dreieck construirt werden, dessen Winkel an der Spitze die Hälfte des Winkels an der Basis ist, so theile man eine Linie ab in c stetig nach 9 und construire über der Mediane ac als Basis ein gleichschenkliges Dreieck, das die ganze Linie ab zum Schenkel hat, so ist dies das verlangte Dreieck.

Fig. 101.



Zum Beweise mache man $ed = ac$ und ziehe ec. Denkt man sich nun durch d, e und c einen Kreis construirt, so ist ac an ihm eine Tangente und c ihr Berührungspunkt, da nach der Construction $ac^2 = ab\,.\,cb = ad\,.\,ed$ ist (§. 18).

Da nun $m = o$ (§. 8) und $p = o + n$ (Außenwinkel) ist; so ist auch $p = m + n = c = d$ und daher auch $ec = ac = ed$ und $o = n$. Daher endlich

$$o = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}d.$$

Bemerkung und Fragen: Aus der Auflösung folgt, daß außer Dreieck adc auch Dreieck edc die geforderte Eigenschaft besitzt, und daß man ebensowohl über der Mediane als über dem kleinern Abschnitte einer stetig getheilten Linie ein solches Dreieck construiren könne. Wodurch unterscheiden sich die beiden Constructionen von einander? Wie groß ist der Winkel an der Spitze e des gleichschenkligen Dreiecks edc? Wie kann man ein gleichschenkliges Dreieck construiren, dessen Winkel an der Spitze das Dreifache des Winkels an der Basis ist? Wie groß sind die Winkel an der Spitze dieser Dreiecke, und wie könnten die Aufgaben deshalb auch ausgedrückt gewesen sein? —

Die Construction des regulären Zehnecks stützt sich auf diese und die vorige Aufgabe. Wie?

Zwölfter Abschnitt.

Theilung des Bogens und der Kreislinie. Winkelmessung.

A. Theilung des Bogens und der Kreislinie.

§. 1.

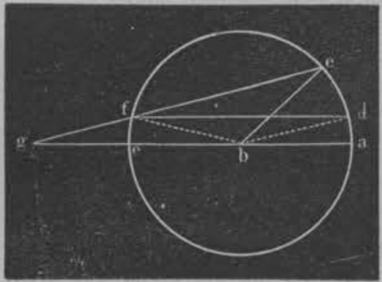
Einen Bogen in zwei gleiche Theile zu theilen.

Jeder Bogen wird durch das Perpendikel, das im Mittelpunkte seiner Sehne errichtet ist, in zwei gleiche Theile getheilt. Warum? Wie wird ein Bogen in vier, acht, sechzehn allgemein $2n$ Theile getheilt?

Bemerkung über die Trisection oder Dreitheilung eines Bogens oder Winkels. Die Theilung eines beliebigen Bogens in zwei, vier, acht gleiche Theile u. s. w. ist die einzige Theilung, welche die Geometrie mit gerader Linie und Kreis leisten kann. Die Dreitheilung oder Trisection eines Bogens oder Winkels ist eine der geometrischen Aufgaben, an denen die elementare Mathematik sich vergebens abmüht; sie ist jedoch schon im Alterthum gelöset und zwar durch den Durchschnitt eines Kreises und der

Konchoide des Nikomedes; sie kann ebensogut durch den Durchschnitt einer Geraden und der Konchoide gelöst werden. — Wird die Analysis der Aufgabe angestellt, und zu diesem Zweck, wie in beistehender Figur, aus der Spitze des gegebenen Winkels mit beliebigem Radius (bc) ein Kreis beschrieben, so wird die Aufgabe, wenn man sie sich durch bd gelöst denkt und noch den Durchmesser ae, die Parallele fd zieht und die Linie cf bis g verlängert, leicht auf die andere Aufgabe reducirt: Durch einen gegebenen Punkt (c) in der Peripherie eines Kreises so eine Secante hindurch zu legen, daß ihr äußerer Abschnitt fg bis zum verlängerten Durchmesser ae dem Radius gleich ist. Daß $gf = fb$ ergibt sich sehr leicht aus der Gleichheit der Winkel. —

Fig. 102.



Wie werden die drei Theile eines Bogens sich zu einander verhalten, wenn man sich ihn durch Perpendikel oder Radien, die durch die entsprechenden Theilpunkte der zugehörigen Sehne gezogen sind, getheilt denkt?

§. 2.

Die Peripherie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Wie und Warum?

§. 3.

Die Peripherie in vier gleiche Theile zu theilen.

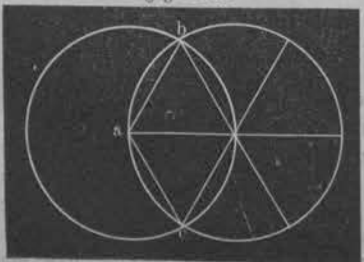
Wie und Warum?

§. 4.

Die Peripherie in sechs gleiche Theile zu theilen.

Soll die Peripherie eines Kreises in sechs gleiche Theile getheilt werden, so beschreibe man aus einem Punkte der Peripherie mit dem Radius des Kreises einen Kreis. Zieht man nun aus dem Mittelpunkte und den beiden Durchschnittspunkten dieses Kreises mit dem gegebenen Kreise Durchmesser, so wird durch sie die Peripherie in sechs gleiche Theile getheilt. — Der Grund für die Gleichheit der Centriwinkel liegt besonders in der Gleichseitigkeit der Dreiecke und kann leicht gefunden werden.

Fig. 103.



§. 5.

Die Peripherie in zehn gleiche Theile zu theilen.

Soll die Peripherie in zehn gleiche Theile getheilt werden, so theile man den Radius stetig und trage seine Mediane wiederholt als Sehne ein, so wird durch sie die Peripherie in zehn gleiche Theile getheilt. Warum?

§. 6.

Die Peripherie in fünfzehn gleiche Theile zu theilen.

Schneidet man von dem sechsten Theile der Peripherie den zehnten Theil ab, so erhält man den fünfzehnten Theil und seine zugehörige Sehne, durch deren wiederholte Abtragung die Peripherie in fünfzehn Theile getheilt werden kann. Denn $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

Fragen: Wie wird die Peripherie in drei und fünf Theile getheilt? In welche Theile kann überhaupt die Peripherie nach den vorigen Aufgaben eingetheilt werden, da sich jeder Bogen wieder halbiren läßt? Welche Theilung, die für die Winkelmessung von Wichtigkeit ist, kommt unter den Theilungen nicht vor? Wie wird der rechte Winkel oder Quadrant in drei Theile getheilt? Läßt sich die halbe Kreislinie und der Quadrant in ebenso viele Theile wie die ganze Peripherie eintheilen und warum?

Bemerkung. Die Eintheilung des Kreises in zwei, drei, fünf und fünfzehn Theile und deren Verdoppelungen waren die einzigen Theilungen, die man bis auf Gauß kannte. Dieser zeigte in seinem Werke über Zahlentheorie (disquisitiones arithmeticae 1801), daß es auch ganz allgemein möglich ist, alle diejenigen genannten Theilungen ausführen zu können, deren Theilungszahl von der Form. $2^n + 1$ ist, wenn diese zugleich eine Primzahl ist. Da dies nun zunächst $17 = 2^4 + 1$ ist, so läßt sich die Peripherie auch in siebzehn Theile theilen. Die Ableitung dieser Theilung und die darauf sich stützende Construction der Seite des regulären Siebenzehnecks kann nur mit Hilfe der trigonometrischen Functionen geschehen.

B. Winkelmessung.

§. 7.

Winkelmessung im Allgemeinen.

Da Winkel immer den Richtungsunterschied von geraden sich durchschneidenden Linien für ihren ganzen Verlauf oder von krummen Linien für ihren

Durchschnittspunkt angeben, so können die Winkel ihrer Größe nach durch alle diejenigen Linienconstructionen gemessen werden, die von der Größe der sich drehenden Linie und der Größe ihrer Drehung zugleich abhängig sind und zwar

a. zunächst am einfachsten und unmittelbarsten durch den Kreisbogen, den wir uns von der Oeffnung der Schenkel mit beliebigem Radius construirt denken, da zu gleichen Bogen gleiche Centri-Winkel gehören und Winkel und Bogen in demselben Verhältniß wachsen und abnehmen.

b. Durch die Sehne, die zwischen den Endpunkten des zugehörigen Bogens gezogen werden kann, wenn die Abhängigkeit der Sehnen von den Winkeln und der Winkel von den Sehnen bekannt wäre.

c. Durch das Perpendikel, das von dem Endpunkte des einen Schenkels auf den andern oder dessen Verlängerung gefällt werden kann, wenn die gegenseitige Abhängigkeit zwischen Perpendikel und Winkel bekannt wäre. Von diesen verschiedenen Methoden die Winkel zu messen, ist die erste die einfachste und aus der Natur des Winkels sich am unmittelbarsten ergebende. Sie hat aber für die Rechnung, die nur mit gleichbenannten Zahlen geführt werden kann, den Nachtheil, daß sie als Maßeinheit einen Theil der Peripherie zum Grunde legt, also eine krumme Linie, während alle übrigen Messungen eine gerade Linie als Einheit annehmen. — Wir haben es hier nur mit der Winkelmessung durch den zugehörigen Bogen und den auf diese sich stützenden Winkelinstrumenten zu thun, werden aber später in der Trigonometrie die andere Methode in aller Ausführlichkeit und mit allen ihren Vortheilen kennen lernen.

§. 8.

Winkelmessung durch den zugehörigen Bogen.

Bei der Messung von Winkeln durch die ihnen zugehörigen Bogen irgend eines bestimmten gegebenen Kreises geht man entweder von der ganzen Peripherie oder irgend einem bestimmten Theile ($^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_6$) derselben als Einheit aus, theilt dieselbe in dreihundertsechzig, hundertachtzig, neunzig, sechzig gleiche Theile oder Grade, jeden Grad in sechzig Minuten und jede Minute in sechzig Secunden und bestimmt durch Congruenz irgend eines Theiles dieses Winkelmaßes mit dem gegebenen Winkel die Größe desselben in Theilen des zugehörigen Bogens.

Fragen: Wie werden Grade, Minuten und Secunden bezeichnet? Wie werden Minuten und Secunden in Decimalbruchtheile des Grades und umgekehrt verwandelt? Wie theilten die Franzosen Jahre lang seit der Revolution den Quadranten oder rechten Winkel ein? Wie werden französische Angaben nach der Centesimaleintheilung in unsere Grade verwandelt und umgekehrt? Was bezeichnet die Benennung Quadrant, Sextant bei den Winkelinstrumenten? Welches sind die einfachsten und gebräuchlichsten Winkelinstrumente? Wodurch unterscheidet sich der Theodolit von den anderen Winkelinstrumenten?

Bemerkung. An dieser Stelle der Geometrie, wo wenig Stoff zu logischen und wissenschaftlichen Erörterungen geboten wird, kann der Lehrer die Fortschritte der praktischen Mechanik in Anfertigung der Winkelinstrumente hervorheben, um den Schüler auf die Bedeutung der Winkelinstrumente für die rechnende Geodäsie und Astronomie hinzuweisen und um zugleich die Grenzen anzudeuten, in denen sich die Beobachtung und darum auch die auf sie sich stützende Rechnung zu halten hat. Denn Winkelangaben bis auf Secunden und selbst Zehntelsecunden lassen sich sehr leicht aussprechen und hinschreiben, aber nicht so leicht selbst mit den vollkommensten Instrumenten nachweisen und reell herstellen. Wie groß müßte wohl die Radiuseinheit eines Winkelinstrumentes anzunehmen sein, um Bogenminuten mit unbewaffnetem Auge unterscheiden zu können, wenn die Peripherie als das 6,28 fache der Radiuseinheit angenommen wird? —

§. 9.

Transporteur (Abträger)

heißt das allgemein bekannte und sich in jedem Reißzeuge befindende Winkelinstrument, mit dem gemessene Winkel gezeichnet und gezeichnete Winkel gemessen werden.

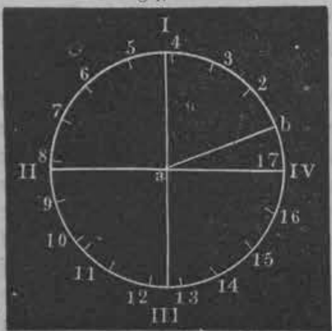
Fragen: Wie ist der Transporteur eingerichtet? Welchen Fehlern ist er unterworfen? Bis zu welchem Grade der Genauigkeit gibt er die Winkel? Wie werden mit ihm gezeichnete Winkel gemessen und in Zahlen gegebene Winkel gezeichnet?

§. 10.

Winkelmessung ohne Winkelinstrument mit Kreis und Zirkel.

Soll ein Winkel ohne Transporteur gemessen und in Graden ausgedrückt werden, so zeichne man aus seiner Spitze einen Kreis mit beliebigem nicht zu kleinem Radius und in ihm zwei senkrechte Durchmesser, von denen der eine mit dem einen Schenkel des Winkels zusammenfällt. Dann fasse man mit dem Zirkel den Bogen oder richtiger die Sehne und trage sie so lange in die Peripherie ein, bis ihr Endpunkt mit einem Durchmesser zusammenfällt. Dividirt man nun mit der Anzahl der Sehnen-Abtragungen in die Anzahl der durchschrittenen Quadranten, so gibt der Quotient die Größe des Winkels in Bruchtheilen des Quadranten oder rechten Winkels an. Will man den Winkel in Graden haben, so muß der Quotient mit 90 multiplicirt werden. Wie groß ist der Winkel *bac* in beistehender Figur, dessen Sehne in vier Quadranten siebzehnmal abgetragen ist? —

Fig. 104.



§. 11.

Zeichnung von Winkeln ohne Winkelinstrument und Kreis.

Alle diejenigen Winkel, die solche Bruchtheile des rechten Winkels sind, welche geometrisch durch Theilung des Quadranten gefunden werden können, lassen sich ohne Winkelinstrument zeichnen.

Welche Winkel lassen sich demnach ohne Transporteur zeichnen? Wie wird ein Winkel von 45^0, 30^0, 60^0, 15^0, 22^0, $30'$ u. s. w. gezeichnet?

Dreizehnter Abschnitt.

Von den in und um den Kreis beschriebenen Figuren.

§. 1.

Erklärung.

Man sagt von einer Figur, daß sie in eine andere eingeschrieben ist, wenn ihre sämmtlichen Ecken auf dem Umfange der andern Figur liegen; diese andere Figur ist umgekehrt um die erstere beschrieben. Eine Figur ist in einen Kreis eingeschrieben (Sehnenfigur), wenn ihre Seiten sämmtlich Sehnen des Kreises sind; sie ist um den Kreis beschrieben (Tangentenfigur), wenn alle ihre Seiten Tangenten desselben sind. Im ersteren Falle ist der Kreis um die Figur beschrieben, im andern Falle dagegen derselben eingeschrieben. Von jenen Figuren sagt man, daß sie centrisch nach den Ecken, von diesen dagegen, daß sie centrisch nach den Seiten sind. —

§. 2.

Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Unter welcher andern Form ist die Aufgabe schon früher gelöst? Wo liegt der Mittelpunkt des Kreises bei den verschiedenen Arten der Dreiecke?

§. 3.

Beziehung zwischen den Seiten und dem Radius oder Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Ist BE die Höhe (h) und BD ein Durchmesser (d) des umschriebenen Kreises; so ist, wenn man noch AD zieht, $\triangle ABD \infty \triangle BEC$ (zwei gleiche Winkel)

und daher $AB : BD = BE : BC$ oder

$$c : \quad d = h \quad : a$$

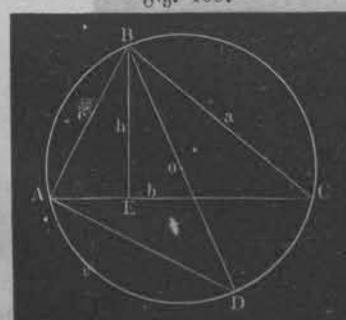
Da nun $d = 2r$ und $h = \frac{2\triangle}{b}$ so ist

$$c : 2r = \frac{2\triangle}{b} : a \text{ oder}$$

$$r = \frac{abc}{4\triangle}; \quad d = \frac{abc}{2\triangle}$$

$$r = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}} \text{ (IX. §. 12).}$$

Fig. 105.



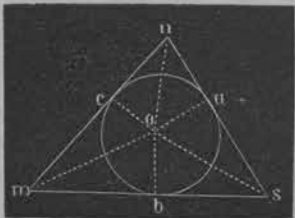
Fragen: Welche Dreiecke würden ähnlich sein, wenn DC statt AD gezogen wäre? Wie würden die Linien gegen einander liegen, wenn A ein stumpfer Winkel wäre und würde der Beweis dadurch Veränderungen erleiden? Wie groß ist der Radius des umschriebenen Kreises, wenn die Seiten des Dreiecks 13, 14, 15 sind?

§. 4.

In und an ein Dreieck Kreise zu beschreiben.

Auflösung und Beweis: Soll in das Dreieck (mns) ein Kreis beschrieben werden, so halbire man zwei Winkel (m u. s) und fälle von dem Durchschnittspunkte (o) ihrer Halbirungslinien ein Perpendikel (ob), so ist der Durchschnittspunkt der Mittelpunkt und das Perpendikel der Radius des eingeschriebenen Kreises. Der Beweis für die Gleichheit der Perpendikel u. s. w. ergibt sich leicht aus der Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke an den Eckstrahlen.

Fig. 106.



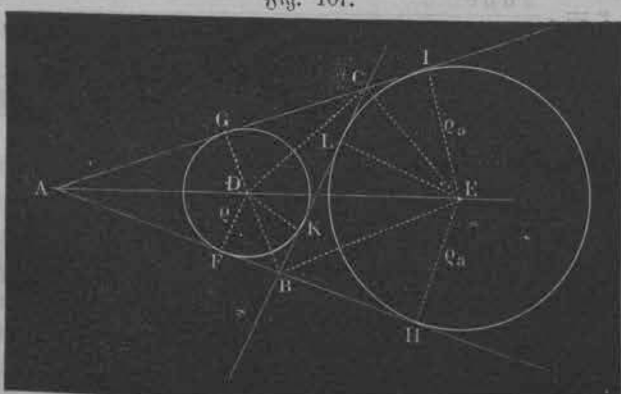
Denkt man sich die drei Seiten des Dreiecks nach beiden Richtungen hin verlängert, so können durch Halbirung der Außenwinkel noch drei andere Kreise von außen so an das Dreieck gezeichnet werden, daß immer eine Seite und die Verlängerungen der beiden anderen Tangenten an den Kreis werden. Nennt man den Kreis, der in das Dreieck gezeichnet ist, einen innern (Berührungs-) Kreis, so heißen diese drei andern passend äußere Kreise. —

§. 5.

Beziehungen zwischen den Seiten des Dreiecks und den Tangentenabschnitten der äußeren und inneren Kreise.

Sind (wie in beistehender Figur) zu einem Dreieck (ABC) (aus D u. E) der innere und der äußere Kreis an eine und dieselbe Seite (a) gezogen, so ist leicht ersichtlich,

Fig. 107.



a. daß sämmtliche Tangenten und Tangentenabschnitte, die von einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte auslaufen, gleich sind,

b. daß jede Seite mit einem Tangentenabschnitte des Gegenwinkels dem halben Umfange (U) des Dreiecks gleich ist, z. B. $AB + CG = \frac{1}{2}U$,

c. daß jede Seite als gemeinschaftliche innere Tangente zwischen einem innern und äußern Kreise dem Tangentenabschnitte zwischen ihren Berührungspunkten gleich ist $BC = FH = GI$,

d. daß jede Tangente an den äußern Berührungskreis dem halben Umfange des Dreiecks gleich ist $AI = AH = \frac{1}{2}U$.

Die Beweise zu den vier Sätzen ergeben sich alle aus dem einen Satze, daß die beiden Tangenten eines Punktes gleich sind. —

§. 6.

Beziehungen zwischen den Seiten des Dreiecks und den Radien der Berührungskreise.

Bezeichnet man die Radien der vier Berührungskreise mit ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c und zwar den innern mit ϱ, den äußern an a mit ϱ_a u. s. w., so ergeben sich an der vorigen Figur leicht folgende Beziehungen zwischen den Radien und dem Inhalte, der seinerseits wieder durch die Seiten bestimmt ist.

1. $\varrho = \frac{2\triangle}{a+b+c}$

2. $\varrho_a = \frac{2\triangle}{b+c-a}$

3. $\varrho_b = \frac{2\triangle}{a+c-b}$

4. $\varrho_c = \frac{2\triangle}{a+b-c}$

5. $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}$

6. $\triangle = \sqrt{\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c}$.

Beweis: Die Gleichung 1 ergibt sich, wenn man das Dreieck ABC in drei Dreiecke zerlegt denkt, welche alle drei ϱ zur Höbe und a, b, c zu Grundlinien haben. —

Die Gleichung 2 ergibt sich, wenn man das $\triangle ABC = ABE + ACE - BEC$ setzt, welche Dreiecke wieder ϱ_a zur Höhe und a, b, c zu Grundlinien haben.

Die Gleichungen 3 und 4 ergeben sich auf dieselbe Weise, wie Gleichung 2.

Die Gleichung 5 erhält man, wenn man die umgekehrten Werthe der 2., 3. und 4. Gleichung addirt.

Die Gleichung 6 erhält man durch Multiplication der ersten vier Gleichungen.

Fragen: Wie groß sind die Höhen- und Seitenabschnitte, Transversalen, Radien, Tangenten, Inhalt u. s. w. eines Dreiecks, dessen Seiten 13, 14, 15 oder 3, 4, 5 sind? Wie lauten die 6 Gleichungen für ein rechtwinkliges, gleichschenkliges, gleichseitiges Dreieck?

Bemerkung. Aus den vorigen Aufgaben folgt, daß jedes Dreieck zugleich nach den Seiten und Ecken centrisch ist, eine Eigenschaft, die bei mehr als dreiseitigen Figuren nur den regulären Polygonen, wie wir sehen werden, zukommt.

§. 7.

Eigenschaft des Sehnenvierecks.

In jedem einem Kreise eingeschriebenen Vierecke beträgt die Summe zweier Gegenwinkel zwei Rechte.

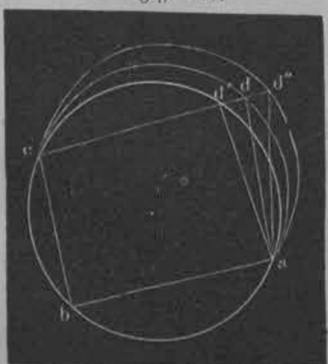
Beweis: Der Beweis für die Richtigkeit des Satzes folgt ganz einfach aus der Bemerkung, daß die beiden Gegenwinkel Peripheriewinkel auf der ganzen Peripherie sind. Wie läßt sich der Beweis an einer Figur versinnlichen?

§. 8.

Um jedes Viereck, in dem zwei Gegenwinkel gleich zwei Rechten sind, läßt sich ein Kreis beschreiben.

Beweis: Durch drei Punkte eines solchen Vierecks läßt sich jedesmal ein Kreis beschreiben. Daß der vierte Punkt ebenfalls in der Peripherie dieses Kreises liegen muß, läßt sich leicht bei jeder andern Annahme indirect, durch den Widerspruch gegen den Satz über den Außenwinkel an beistehender Figur zeigen.

Fig. 108.



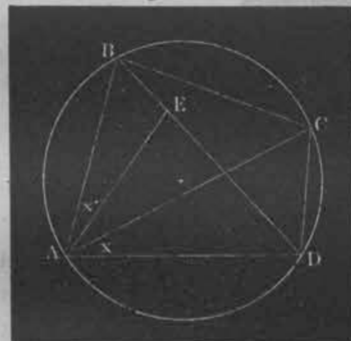
Fragen: Um welche Parallelogramme läßt sich ein Kreis beschreiben? Um welche Trapezia?

§. 9.

Ptolomäischer Lehrsatz über das Sehnenviereck.

In jedem Sehnenviereck ist das Rechteck aus den beiden Diagonalen gleich den beiden Rechtecken, die aus den beiden Paar Gegenseiten gebildet werden.

Fig. 109.



Beweis:

Ist $ABCD$ ein Sehnenviereck, so ist $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$. Theilt eine Diagonale z. B. AC den Winkel bei A ungleich, so mache man $x = x'$ und ziehe AE, so erhält man zwei Hilfsdreiecke ABE und EAD, welche den Dreiecken ACD und ABC an der Diagonale AC ähnlich sind (zwei gl. W.) Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

ABE und ACD erhält man die Proportion $AB : BE = AC : CD$ und aus den Dreiecken

AED und ABC „ „ „ „ $AD : ED = AC : BC$.

Aus ihnen erhält man die gleichen Produkte oder Rechtecke $AB \cdot CD = BE \cdot AC$

und $AD \cdot BC = ED \cdot AC$.

Daher $AB \cdot CD + AD \cdot BC = (BE + ED)\, AC = BD \cdot AC$.

Fragen: Welche Beziehung findet zwischen den Fi uren der Seiten und Diagonalen statt, wenn die Diagonalen eines Sehnenvierecks winkelrecht aufeinander stehen?

§. 10.

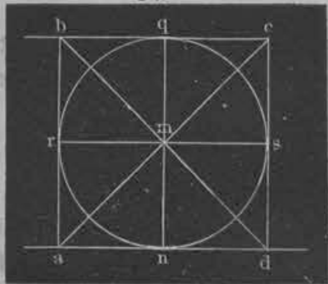
Eigenschaft des Tangentenvierecks.

a. In jedem Tangentenviereck ist die Summe beider Gegenseitenpaare gleich.

b. Jedes Tangentenviereck zerfällt durch die vier Radien in vier Sehnenvierecke.

Beweis: Der Beweis für beide Eigenschaften folgt einfach aus der Construction und der Gleichheit der Tangenten. —

Fig. 110.



§. 11.

In jedes Viereck mit gleichen Gegenseitenpaaren läßt sich ein Kreis einschreiben.

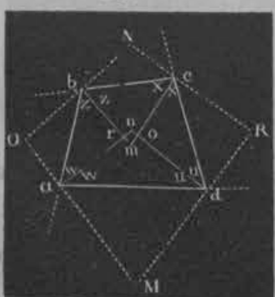
Beweis: An drei Seiten läßt sich durch Halbirung zweier Winkel (a und d) ein Kreis beschreiben, daß dieser Kreis auch die vierte Seite (bc) berühren muß, ist bewiesen, wenn aus der Annahme sich zeigen läßt 1. daß $bc = rb + cs = bq + qc$

2. „ mq winkelrecht auf bc steht.

Die erste Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Annahme und der Construction und die zweite aus der Gleichung $mc^2 - qc^2 = bm^2 - bq^2$. Wie folgt diese Gleichung aus der Voraussetzung und Construction und in welcher Beziehung steht sie zum pythagoräischen Lehrsatze?

Fragen: In welche Parallelogramme läßt sich ein Kreis beschreiben? Wenn die Halbirungslinien eines Vierecks nicht in einem Punkte zusammentreffen, so liegen sie alle außereinander und bilden jedesmal ein Sehnenviereck. Ebenso entsteht ein Sehnenviereck durch die Perpendikel, welche auf den Halbirungslinien der Winkel in den Winkelspitzen errichtet werden. Warum?

Fig. 111.



Der Beweis kann leicht mit Hilfe von beistehender Figur an den Vierecken $mrno$ in $MRNO$ geführt werden. Warum ist in jedem Sehnenvielecke von gerader Seitenanzahl die Summe des ersten, dritten, fünften Winkels u. s. w. gleich der Summe des zweiten, vierten, sechsten Winkels u. s. w.? Warum ist in jedem Tangentenvielecke von gerader Seitenzahl die Summe der ersten, dritten,

fünften Seite u. s. w. gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten Seite u. s. w.? Wie verhalten sich die Diagonalen eines Sehnenvierecks zu einander und wie groß ist jede? (Mit Hilfe von 3 und 9 zu beantworten).

Uebergang. Um und in jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben. Von den Vierecken dagegen können nur diejenigen Sehnen- und Tangentenvierecke sein, deren Gegenwinkel- und Gegenseitenpaare gleich sind. Unter den anderen Vielecken sind die regulären Figuren, zu denen wir nun übergehen, zugleich Sehnen- und Tangentenvielecke.

Vierzehnter Abschnitt.

Von den regulären Figuren.

§. 1.

Erklärung.

Regulär heißt jede Figur, die zugleich gleichseitig und gleichwinklig ist.

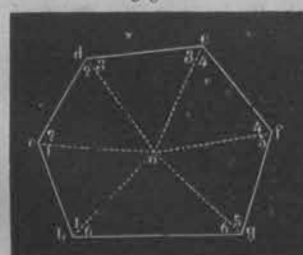
Fragen: Haben wir schon reguläre Figuren kennen gelernt? Sind Rhombus und Rechteck reguläre Figuren?

§. 2.

Um und in jede reguläre Figur läßt sich ein Kreis beschreiben.

a. Ist $bcdef\ldots$ eine reguläre Figur, so läßt sich durch Halbirung zweier Seiten, z. B. bc und cd, aus dem Durchschnittspunkte (a) ihrer Perpendikel ein Kreis durch b, c, d legen. Daß dieser auch durch e und aus denselben Gründen auch durch f und jeden folgenden Punkt gehen muß, folgt aus der Congruenz der Dreiecke bca und cda, aus der Halbirung des Winkels bei d, aus der Congruenz der Dreiecke cad und dae, und der Gleichheit von ac mit ad u. s. w.

Fig. 112.



b. Daß in jede reguläre Figur sich ein Kreis einschreiben läßt, folgt aus der Gleichheit der Perpendikel ma, oa, na u. s. w., die in congruenten gleichschenkligen Dreiecken aus der gemeinschaftlichen Spitze gezogen sind.

§. 3.

Folgerungen, Erklärungen und Eigenschaften der regulären Figuren.

Aus dem vorigen Satze folgt:

a. daß jede reguläre Figur einen Mittelpunkt hat und centrisch nach den Ecken und Seiten zugleich ist,

b. daß alle Eckstrahlen oder großen Radien gleich sind,

c. daß alle Seitenstrahlen oder kleinen Radien gleich sind,

d. daß nicht nur die Polygonwinkel, sondern auch alle Centriwinkel, d. h. Winkel zwischen zwei Eckstrahlen gleich sind,

e. daß auch sämmtliche Winkel zwischen benachbarten Seitenstrahlen unter sich und den Centriwinkeln gleich sind,

f. daß jede reguläre Figur von n Seiten durch die Eckstrahlen in n congruente gleichschenklige Dreiecke und durch die Seitenstrahlen in n congruente Sehnenvierecke zerlegt wird,

g. daß jedes reguläre nEck durch die Eck- und Seitenstrahlen in $2n$ congruente rechtwinklige Dreiecke zerfällt,

h. daß der Centriwinkel eines nEcks $x = \frac{4R}{n} = \frac{360^0}{n}$ ist,

i. daß jeder Polygonwinkel „ „ $\frac{2nR - 4R}{n}$ ist,

k. daß sich Centri- und Polygon-Winkel zu zwei Rechten ergänzen,

l. daß alle regulären Figuren von gleicher Seitenzahl ähnliche Figuren sind, daß sich daher ihre Umfänge wie gleichliegende Linien und ihre Flächeninhalte wie die Quadrate gleichliegender Linien verhalten,

m. daß jede reguläre Figur einem Dreiecke gleich ist, das den Umfang zur Grundlinie und den Seitenstrahl zur Höhe hat,

n. daß jede reguläre Figur durch eines der in g. aufgeführten rechtwinkligen Dreiecke — die daher Bestimmungsdreiecke heißen —, bestimmt ist,

o. daß jedes dieser Bestimmungsdreiecke durch eine Seite bestimmt ist, da die Winkel desselben als halbe Centri- Polygon-Winkel nach h und c immer bekannt sind, sobald die Seitenanzahl gegeben ist und endlich

p. daß es daher in Bezug auf Construction und Berechnung des regulären Vielecks nur drei Grundaufgaben geben kann, jenachdem großer oder kleiner Radius oder die Seite gegeben ist. —

Fragen: Wie groß sind die Centri- und Polygonwinkel der regulären Figuren von 3 — 12 Eck?

§. 4.

Constructionen der regulären Figuren aus dem großen Radius oder Einschreibung einer regulären Figur in einen gegebenen Kreis.

Auflösung und Beweis: Soll eine reguläre Figur von bestimmter Seitenzahl (n), zu deren Zeichnung der große Radius gegeben ist, construirt werden, so zeichne man mit dem gegebenen Radius einen Kreis, theile die Peripherie desselben in n gleiche Theile, verbinde die Theilpunkte durch gerade Linien, so ist die dadurch gebildete Figur das verlangte, reguläre, dem Kreise eingeschriebene, Polygon. Denn alle Seiten sind gleich als Sehnen gleicher Bogen und alle Winkel als Peripheriewinkel in oder auf gleichen Bogen.

Fragen: Von welcher frühern Aufgabe hängt die streng geometrische Lösung unserer Aufgabe ab? Welche regulären Vielecke lassen sich streng geometrisch in einen Kreis einzeichnen? Wie wird ein reguläres Dreieck, Viereck, Sechseck, Zehneck, Fünfeck, Fünfzehneck u. s. w. in einen Kreis eingezeichnet? Wie groß ist die Seite des regulären Sechsecks? Wie groß ist die Seite des regulären Zehnecks? —

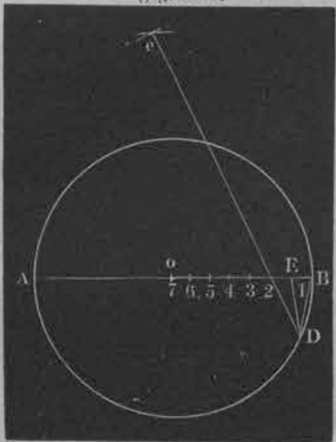
Bemerkung. Die Construction der übrigen regulären Polygone, z. B. des regulären Siebenecks, Neunecks u. s. w., kann nur mechanisch durch Probiren oder durch sogenannte Näherungsconstructionen ausgeführt werden, von denen zwei in dem folgenden Paragraph angegeben werden sollen, deren Prüfung oder Discussion der Trigonometrie vorbehalten bleibt. —

§. 5.

Näherungsconstructionen.

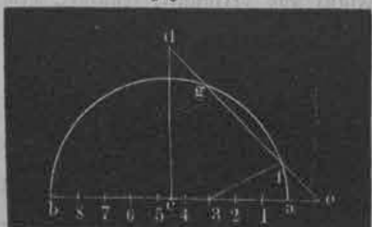
a. Construction des Renaldini. Man ziehe einen beliebigen Durchmesser AB, theile denselben in n (14) Theile und construire über ihm ein gleichseitiges Dreieck. Legt man nun durch die Spitze desselben und den zweiten Theilpunkt des Durchmessers eine gerade Linie und verlängert sie bis zur Peripherie nach D, so ist die Sehne BD annähernd die Seite des verlangten (14) n Ecks. — Die Auflösung ist aber nicht sehr genau und man kann sich ihrer beim Elfeck kaum bedienen, wie die Trigonometrie zeigen wird. (Fig. 113).

Fig. 113.



b. Eine andere Construction. Man theile den Durchmesser ab in n (9) Theile, errichte im Mittelpunkte einen Radius senkrecht zum Durchmesser, verlängere beide Linien um $\frac{1}{n} ab$ und ziehe de, welche den Kreis in zwei Punkten f und g schneidet. Zieht man nun nach dem dritten Theilpunkte die Linie fh, so ist diese annähernd die Seite des verlangten (9) n Ecks. Für $n < 5$ gibt die Construction keine, für $n = 5$ eine unbrauchbare, für $n > 5$ immer eine sehr brauchbare Lösung. (Fig 114).

Fig. 114.



§. 6.

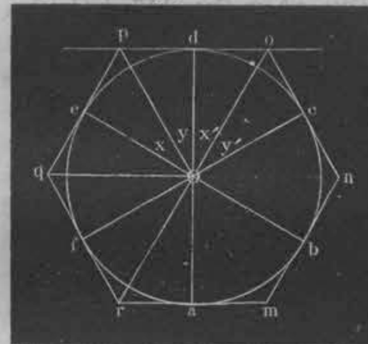
Construction der regulären Figuren aus dem kleinen Radius oder Umschreibung einer regulären Figur um einen gegebenen Kreis.

Soll eine reguläre Figur mit bestimmter Seitenanzahl, zu deren Zeichnung der kleine Radius gegeben ist, construirt werden, so zeichne man mit dem gegebenen Radius einen Kreis, theile die Peripherie desselben in n Theile, ziehe durch sämmtliche Theilpunkte Tangenten an den Kreis, bis sie sich durchschneiden, so ist die dadurch gebildete Figur das geforderte reguläre, dem Kreis umschriebene Polygon.

Beweis: Denn denkt man sich außer den Seitenstrahlen auch noch die Eckstrahlen gezogen, wie in Figur (115), so sind

a. die sämmtlichen Dreieckspaare zu beiden Seiten der Eckstrahlen unter sich congruent (3 gleiche Seiten) und daher $x = y$; $x' = y'$; $ep = pd$; $do = oc$ u. s. w. Da nun auch $x + y = x' + y'$ u. s. w. nach der Construction ist, so ist auch $x = y = x' = y'$ u. s. w.

Fig. 115.



b. Die sämmtlichen Dreieckspaare zu beiden Seiten der Seitenstrahlen unter sich congruent (zwei Winkel und eine gleiche Seite) und daher $qe = ep$; $pd = do$ u. s. w.

c. Sämmtliche Seiten und Winkel gleich als Verdoppelungen gleicher Linien und Winkel. —

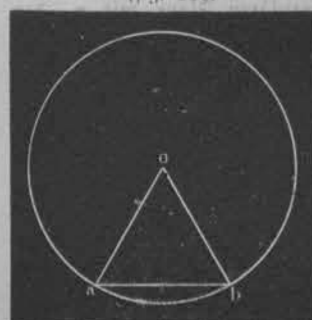
Bemerkung und Fragen. Diese Aufgabe hängt wie Aufgabe 4 von der Eintheilung des Kreises ab, und wird streng geometrisch wie die Aufgabe 4 gelöset. Wie erhält man zu einem innern regulären Sehnenpolygone ein umschriebenes mit parallelen Seiten?

§. 7.

Construction der regulären Figuren über der zu ihnen gegebenen Seite.

Soll über einer Linie (ab) als Seite eine reguläre Figur von bestimmter Seitenzahl (n) dieselbe gezeichnet werden, so zeichne man an beide Endpunkte den halben Polygonwinkel der regulären Figur und verlängere ihre Schenkel bis zum Durchschnittspunkte. Construirt man nun mit oa einen Kreis, so geht dieser auch durch b und ab läßt sich in ihm n mal als Sehne eintragen. Denn das Dreieck aob ist nach der Construction gleichschenklig und enthält an der Spitze den Centriwinkel des n-Ecks. Warum?

Fig. 116.



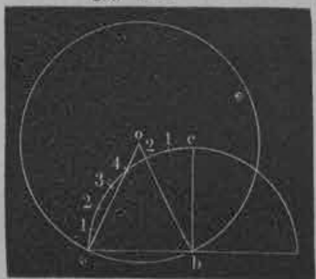
Bemerkung. Durch Antragung der halben Polygonwinkel lassen sich nur diejenigen Polygone bequem und genau zeichnen, deren halber Polygonwinkel ohne Hilfe des Transporteurs mit Lineal und Zirkel gezeichnet werden kann. Welche Polygone lassen sich demnach nur auf diese Weise zeichnen? Wie zeichnet man ein reguläres Dreieck und Viereck? Wie zeichnet man ein reguläres Sechseck?

§. 8.

Mechanische Construction eines Polygons über einer Seite.

Soll eine reguläre Figur über einer Seite ab in Fig. 117 beschrieben werden, so zeichne man mit ab als Radius aus b einen Halbkreis, theile den Quadranten ac nöthigenfalls mechanisch in n Theile und ziehe von b durch den zweiten Theilpunkt von c aus gerechnet und von a durch den vierten Theilpunkt, von a aus gerechnet, Linien, die sich in o schneiden. Beschreibt man nun von o aus als Mittelpunkt einen Kreis mit oa, so geht dieser auch durch b und in ihn läßt sich ab als Sehne oder Seite des n Ecks n mal eintragen. —

Fig. 117.



Denn $x = \frac{n-2}{n} R =$ dem halben Polygonwinkel des n Ecks und $y = x =$ dem halben Polygonwinkel des n Ecks, da y auf doppelt so großem Bogen als x steht. —

§. 9.

Grundgleichungen für die Berechnung jeder regulären Figur.

Bezeichnet man den großen Radius einer regulären Figur mit r, den kleinen Radius mit ϱ, die Seite mit s, den Umfang mit u und den Inhalt mit f, so ergeben sich aus der Natur des Polygons und des Bestimmungsdreiecks als rechtwinkligen Dreiecks folgende fünf Grundgleichungen für die Berechnung der regulären Polygone:

1. $r = \sqrt{\varrho^2 + {}^1\!/_4 s^2} = {}^1\!/_2 \sqrt{4\varrho^2 + s^2}$
2. $\varrho = \sqrt{r^2 - {}^1\!/_4 s^2} = {}^1\!/_2 \sqrt{4r^2 - s^2}$
3. $s = 2\sqrt{r^2 - \varrho^2}$
4. $u = n . s$
5. $f = \left(\frac{\varrho . s}{2}\right) n = \frac{\varrho . s . n}{2}.$

Bemerkung. Da diese fünf Grundgleichungen bei allen folgenden Aufgaben vorkommen, so muß sie der Schüler sich immer gegenwärtig erhalten, um von ihnen mit Leichtigkeit Gebrauch machen zu können. —

§. 10.

Berechnung derjenigen regulären Vielecke, die geometrisch construirt werden können.

Alle diejenigen regulären Figuren, die sich geometrisch nach §. (7) construiren lassen, können auch mit Hilfe der angeführten fünf Grundgleichungen, ohne die Trigonometrie in Anspruch zu nehmen, berechnet werden, da bei ihnen, wie wir gleich sehen werden, durch eine Seite des Bestimmungsdreiecks auch die übrigen mitgegeben und bestimmt sind. Nimmt man zunächst den großen Radius als bekannt an, so ergeben sich für die Berechnung der einzelnen Polygone folgende einzelne Sätze und Formeln:

a. **Berechnungsformeln für das reguläre Dreieck.** In jedem regulären Dreieck ist das Bestimmungsdreieck, ein rechtwinkliges Dreieck, mit einem halben Centriwinkel von 60^0 und einem halben Polygonwinkel von 30^0, oder die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks, indem der große Radius Seite, der kleine Radius halbe Seite und die halbe Seite Höhe ist. —

Demnach ist

für $r = r$ oder	$r = 1$ gesetzt
1. $\varrho = {}^1\!/_2 r$	1. $\varrho = {}^1\!/_2$
2. $s = 2\sqrt{r^2 - {}^1\!/_4 r^2} = r\sqrt{3}$	2. $s = 1{,}732.$
3. $u = 3r\sqrt{3}$	3. $u = 3 . 1{,}732.$
4. $f = {}^1\!/_2 r . {}^1\!/_2 r\sqrt{3} . 3 = {}^3\!/_4 r^2\sqrt{3}$	4. $f = {}^3\!/_4 . 1{,}732.$

b. **Berechnungsformeln für das reguläre Viereck (Quadrat).** In jedem regulären Viereck ist das Bestimmungsdreieck ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse der große Radius ist. Daher ist $r^2 = 2\varrho^2$ und $r = \varrho\sqrt{2}$.

Demnach ist

für $r = r$ oder	$r = 1$ gesetzt
1. $\varrho = {}^1\!/_2 r\sqrt{2}$	1. $\varrho = {}^1\!/_2\sqrt{2} = {}^1\!/_2 . 1{,}4142.$
2. $s = r\sqrt{2}$	2. $s = \sqrt{2}.$
3. $u = 4r\sqrt{2}$	3. $u = 4\sqrt{2}.$
4. $f = {}^1\!/_4 r\sqrt{2} . r\sqrt{2} . 4 = 2r$	4. $f = 2.$

c. **Berechnungsformeln für das reguläre Sechseck.** In jedem regulären Sechseck ist das Bestimmungsdreieck die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite der große Radius, dessen Höhe der kleine Radius und dessen Basis die Seite des Sechsecks ist.

Demnach ist

für $r = r$ oder	$r = 1$ gesetzt
1. $\varrho = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} r^2} = \frac{1}{2} r \sqrt{3}$	1. $\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
2. $s = r$	2. $s = 1$.
3. $u = 6r$	3. $u = 6$
4. $f = \frac{1}{4} r \sqrt{3} . r . 6 = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}$	4. $f = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

d. **Berechnungsformeln für das reguläre Zehneck.** In jedem regulären Zehneck ist das Bestimmungsdreieck die Hälfte eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Winkel an der Spitze halb so groß ist, als der Winkel an der Basis. Die Seite des regulären Zehnecks ist nach (XII. §. 10) Mediane des stetig getheilten Radius und daher $s^2 = r\ (r - s)$ oder $s^2 = r^2 - rs$. Daher $s^2 + rs = r^2$.

Demnach ist

für $r = r$ oder $\qquad$ $r = 1$ gesetzt.

$$1.\quad s = -\frac{1}{2} r + \sqrt{\frac{r}{4} + r^2} = -\frac{1}{2} r + \frac{1}{2} r \sqrt{5} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$1.\quad s = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})}$$

$$2.\quad \varrho = \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \qquad 2.\quad s = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$3.\quad u = 10 . \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = 5r(\sqrt{5} - 1)$$

$$3.\quad u = 5\,(\sqrt{.\,5} - 1)$$

$$f = \frac{r}{4} . (\sqrt{5} - 1)\frac{r}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}) . 10$$

$$= \frac{5r^2}{8}\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

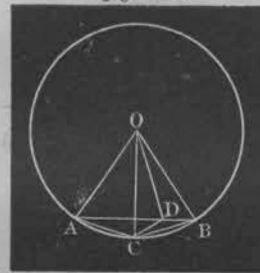
$$= \frac{5r^2}{8}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} . \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$4.\quad f = \frac{5r^2}{8}\sqrt{40 - 8\sqrt{5}} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$4.\quad f = \frac{5}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

e. **Berechnungsformeln für das reguläre Fünfeck.** Die Seite des regulären Fünfecks ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen beide Katheten der große Radius (Seite des Sechsecks) und die Seite des Zehnecks sind.

Fig. 118.



Beweis: Es sei AB in Figur (118) die Fünfecksseite und $AC = BC$ die Zehnecksseite. Zieht man nun die Halbmesser OA, OB, OC, halbirt den Winkel BOC durch die gerade Linie OD und zieht DC, so ist

1. $\triangle ADO \backsim \triangle AOB$ und 2. $\triangle BDC \backsim \triangle ABC$ (Warum)?

daher $AD : AO = AO : AB$ und $DB : BC = BC : AB$

oder $AD . AB = AO^2$ und $DB . AB = BC^2$

daher $AD . AB + DB . AB = AO^2 + BC^2$

oder $AB\ (AD + DB) = AB . AB = AB^2 = AO^2 + BC^2$.

Bildet man daher aus AB, AO, BC ein Dreieck, so muß dasselbe als Gegenwinkel von AB einen rechten Winkel haben (IX. §. 6). AO und BC müssen seine Katheten sein.

Demnach ist

$r = r$ oder $r = 1$ gesetzt.

$$s^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 \text{ und}$$

$$s = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})} = \sqrt{\frac{10r^2}{4} - \frac{2r^2}{4}\sqrt{5}}$$

$$1.\quad s = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \qquad 1.\quad s = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6r^2}{4} + \frac{2r^2}{4}\sqrt{5}}$$

$$2.\quad \varrho = \frac{r}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{r}{4}(\sqrt{5} + 1)$$ Leitfaden der Arithm. (§.55)

$$2.\quad \varrho = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$$

$$3.\ u = \frac{5r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \qquad 3.\ u = {}^5/_2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$f = \frac{r}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\ .\ \frac{r}{4}(\sqrt{5}+1)\,.\,5$$

$$= \frac{5r^2}{16}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,.(\sqrt{5}+1)^2 = \frac{5r^2}{16}\sqrt{(10-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}$$

$$4.\ f = \frac{5r^2}{16}\sqrt{40+8\sqrt{5}} = \frac{5r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

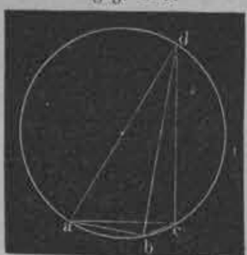
$$4.\ {}^5/_8\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

f. Berechnungsformeln des regulären Fünfzehnecks.

Die Seite des regulären Fünfzehnecks ist die Seite eines Sehnenvierecks, dessen Seiten und Diagonalen durch den Radius bestimmt sind.

Beweis: Ist ac die Seite des Sechsecks, ab die Seite des Zehnecks, so ist bc die Seite des Fünfzehnecks. Zieht man nun noch den Durchmesser ad und von d aus die Sehnen bd und dc, so sind in dem Sehnenvierecke $abcd$ alle Seiten und Diagonalen durch den Radius bestimmt. Denn

Fig. 119.



$1.\ ad = 2r$; $2.\ ac = r$; $3.\ ab = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$;

$$4.\ db = \sqrt{4r^2 - \left(\frac{r}{2}\sqrt{5}-1\right)^2}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$5.\ dc = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3};$$

6. bc endlich ist durch den ptolomäischen Lehrsatz bestimmt.

Demnach erhält man zunächst für $bc = s$ die Gleichung $bc\,.\,ad + ab\,.\,dc = ac\,.\,bd$ oder $s\,.\,2r + \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\,r\sqrt{3} = \frac{rr}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$

Aus ihr durch Division mit $2r$ die Gleichung: $s + \frac{r}{4}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3} = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ und

$$s = \frac{r}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (\sqrt{15}-\sqrt{3})\right)$$

$$= \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{r}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{18-6\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{r}{4}\sqrt{(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{18-6\sqrt{5}})^2}$$

$$= \frac{r}{4}\sqrt{28-4\sqrt{5}-4\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$$

$1.\ s = \frac{r}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}.$ Dann ist

$$2.\ \varrho = {}^1/_2\sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}(7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}})}$$

$= \frac{r}{4}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}.$ Ferner

$3.\ u = \frac{15r}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}.$ Endlich

$$f = {}^1/_2\,.\,15\,.\,\frac{r}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}} \times$$

$$\frac{r}{4}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{15r^2}{16}\sqrt{(7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}})(9+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}})}$$

$$= \frac{15r^2}{16}\sqrt{28+4\sqrt{5}-2\sqrt{30-6\sqrt{5}}-2\sqrt{5}\,.\,\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{15r^2}{16}\sqrt{28+4\sqrt{5}-(2+2\sqrt{5})\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{15r^2}{16}\sqrt{28+4\sqrt{5}-(\sqrt{2+2\sqrt{5}})^2\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{15r^2}{16}\sqrt{28+4\sqrt{5}-\sqrt{24+8\sqrt{5}}\,.\,\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{15r^2}{16}\sqrt{28+4\sqrt{5}-4\sqrt{30+6\sqrt{5}}}$$

$$4.\ f = \frac{15r^2}{8}\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}.$$

Wie lauten die Gleichungen 1, 2, 3, 4, wenn $r = 1$ gesetzt wird?

Bemerkung. Diese, sowie die nachfolgende Ableitung von Formeln, die weniger gebraucht werden, ist darum in den Leitfaden aufgenommen, um den Schüler in der Umwandlung und Vereinfachung von Formeln zu üben und ihm Gelegenheit zu verschaffen, die praktische Verwendung specieller mathematischer Lehren, namentlich die Verwandlung von zweigliedrigen Wurzelausdrücken in eingliedrige, an geometrischen Aufgaben kennen zu lernen.

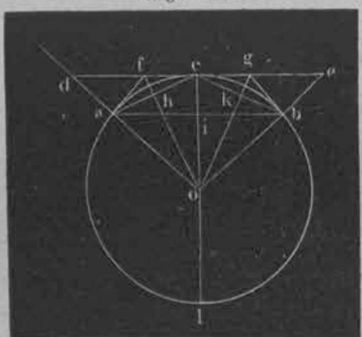
§. 11.

Berechnung von regulären Figuren, die von andern abhängig sind.

Aufgabe. Aus der Seitenzahl (n) eines regulären Vielecks, der Seite (s) und dem Radius (r) des umschriebenen Kreises, a. die Seiten, kleinen Radien und Flächeninhalte der ein- und umschriebenen nEcke und $2n$Ecke zu finden, sowie b. das Verhältniß ihrer Inhalte zu bestimmen. —

Construction und Ableitung. Ist $ab = s$ die Seite des gegebenen nEcks und $ao = bo = r$, so ziehe man den Radius oc winkelrecht auf ab, lege durch c eine Parallele de zu ab, bis sie die verlängerten Radien ao und ab in d und e schneidet; ziehe die Sehnen ac und cb und fälle auf sie die Perpendikel oh und ok, die bis f und g verlängert werden. Zieht man endlich noch af und bg, so ist unmittelbar aus der Construction ersichtlich, daß

Fig. 120.



1. de die Seite des umschriebenen nEcks ist. (S)
2. ac „ „ „ eingeschriebenen $2n$Ecks. (s')
3. ah der kleine Radius des eingeschriebenen $2n$Ecks. (ϱ')
4. fg die Seite des umschriebenen $2n$Ecks (S').

Bezeichnet man nun noch die Flächeninhalte der ein- und umschriebenen nEcke und $2n$Ecke mit f, f', F und F' so ist nach frühern Formeln (§. 9).

$$1.\ io = \varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2}$$

$$2.\ f = \frac{n}{2}\,.\,\varrho\,.\,s = \frac{ns}{4}\sqrt{4r^2 - s^2}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke oab und ode folgt: $de : ab = co : oi$ oder $S : s = r : \varrho$ und daher $S = \frac{sr}{\varrho}$ oder

$$3.\ S = \frac{sr}{\tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2}} = \frac{2sr}{\sqrt{4r^2 - s^2}}.$$

Ferner ist $F = \frac{n}{2}.S.r = \frac{nr}{2}\,.\,\frac{2sr}{\sqrt{4r^2 - s^2}}$ oder

$$4.\ F = \frac{nr^2 s}{\sqrt{4r^2 - s^2}}.$$

Von der Sehne ac im Halbkreise gilt $ac^2 = ci\,.\,cl$. oder $s'^2 = (r - \varrho)\,2r = (r - \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2})\,2r$ und daher

$$5.\ s' = \sqrt{2r(r - \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2})} = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - s^2})}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck cho ergibt sich $oh = \varrho' = \sqrt{oc^2 - hc^2}$ $= \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s'^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r(2r - \sqrt{4r^2 - s^2})}{4}}$ und daher

$$6.\ \varrho' = \tfrac{1}{2}\sqrt{r(2r + \sqrt{4r^2 - s^2})}.$$

Daraus folgt, daß $f' = \frac{2n}{2}\,.\,s'\varrho' = n\sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - s^2})} \times$ $\tfrac{1}{2}\sqrt{r(2r + \sqrt{4r^2 - s^2})}$ und

$$7.\ f' = \frac{rn}{2}\sqrt{4r^2 - (4r^2 - s^2)} = \frac{nrs}{2}.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke aco und fgo folgt: $fg : co = ac : ho$ und daher $fg = S' = \frac{co\,.\,ac}{ho} = \frac{rs'}{\varrho'}$ oder

$$S' = \frac{r\sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - s^2})}}{\tfrac{1}{2}\sqrt{r(2r + \sqrt{4r^2 - s^2})}} = 2r\sqrt{\frac{2r - \sqrt{4r^2 - s^2}}{2r + \sqrt{4r^2 - s^2}}}$$

$$= 2r\sqrt{\frac{(2r - \sqrt{4r^2 - s^2})^2}{4r^2 - (4r^2 - s^2)}}$$ oder

$$8.\ S' = \frac{2r\,(2r - \sqrt{4r^2 - s^2})}{s}.$$

Endlich ist $F' = \frac{2n}{2} r \,.\, S' = nr \,.\, 2r\, \frac{(2r - \sqrt{4r^2 - s^2})}{s}$ und

$$9.\ F' = \frac{2nr^2}{s}\,(2r - \sqrt{4r^2 - s^2}).$$

Stellt man zum Schluß, um die Formeln für den Flächeninhalt vergleichen zu können, sie wie folgt zusammen:

$$1.\quad f = \frac{ns}{4}\sqrt{4r^2 - s^2}$$

$$2.\ F = \frac{nr^2 s}{\sqrt{4r^2 - s^2}}$$

$$3.\ f' = \frac{nrs}{2}$$

$$4.\ F' = \frac{2nr^2}{s}\,(2r - \sqrt{4r^2 - s^2})$$

so ergibt sich unmittelbar, daß

$$1.\ fF = f'^2 \text{ oder } f' = \sqrt{fF}.$$

d. h. die Fläche des eingeschriebenen $2n$ Ecks ist die mittlere Proportionale zwischen den Flächen des ein- und umschriebenen n Ecks.

Um endlich F' mit den drei anderen Flächen vergleichen zu können, multiplicire man seinen Inhalt im Zähler und Nenner mit $(2r + \sqrt{4r^2 - s^2})$, so erhält man $\frac{2nr^2}{s} \,.\, \frac{s^2}{2r + \sqrt{4r^2 - s^2}}$. Multiplicirt man nun Zähler und Nenner mit $^1/_4 n$, so ist $\frac{^1/_2 n^2 r^2 s^2}{^1/_2 srn + {^1/_4} ns\sqrt{4r^2 - s^2}} = \frac{2fF}{f' + f}$

und daher $2.\ F' = \frac{2fF}{f' + f} = \frac{2f'^2}{f' + f}$. Multiplicirt man in Formel $\frac{2fF}{f'+f}$ Zähler und Nenner mit f', so erhält man aus ihr $\frac{2ff'F}{ff' + ff'} = \frac{2ff'F}{fF + ff'}$. Dividirt man mit dem gemeinschaftlichen Faktor f, so ist

$$3.\ F' = \frac{2f'F}{f' + F.}$$

d. h. die Fläche des umschriebenen $2n$ Ecks ist das harmonische Mittel zwischen den Flächen des eingeschriebenen $2n$ Ecks und des umschriebenen n Ecks.

Bemerkung. Will man die Inhalte der regulären eingeschriebenen und umschriebenen Polygone von $2n$, $4n$ u. s. w. Seiten berechnen, so berechnet man F' bequemer nach Formel 2 als nach Formel 3. Warum?

§. 12.

Ein eingeschriebenes reguläres $2n$ Eck ist einem Dreiecke gleich, das den großen Radius zur Höhe und den Umfang des eingeschriebenen n Ecks zur Basis hat.

Behalten wir die Bezeichnungen der frühern Paragraphen bei und bezeichnen wir außerdem die Umfänge der regulären ein- und umschriebenen n- und $2n$ Ecke mit u, u', U und U', so ist $F = {^1/_2}\, r \,.\, U$. und $f : F = u^2 : U^2$ (X. §. 11). Multiplicirt man nun das erste Verhältniß mit F und das zweite mit $^1/_4 r^2$, so ist: $fF : F^2 = {^1/_4} r^2 u^2 : {^1/_4} r^2 U^2$. Da nun $F^2 = {^1/_4} r^2 U^2$, so ist auch $fF = {^1/_4} r^2 u^2$. Da nun $fF = f'^2$ (§. 11), so ist $f'^2 = {^1/_4} r^2 u^2$ und $f' = {^1/_2}\, ru$. —

§. 13.

Vergleichung der Umfänge der ein- und umschriebenen Vielecke.

a. **Der Umfang des umschriebenen regulären $2n$ Ecks ist das harmonische Mittel zwischen den Umfängen des ein- und umschriebenen n Ecks.**

Beweis: Denn da $F' = \frac{2f'F}{f' + F}$ so ist nach §. 12

$$^1/_2 r \,.\, U' = \frac{2 \,.\, {^1/_2} ru \,.\, {^1/_2} rU}{^1/_2 ru + {^1/_2} rU} \text{ und}$$

$$U' = \frac{2uU}{u + U}$$

b. **Der Umfang des eingeschriebenen regulären $2n$ Ecks ist die mittlere Proportionale zwischen den Umfängen des eingeschriebenen n Ecks und umschriebenen $2n$ Ecks.**

Beweis: Nach 11 ist der Inhalt des eingeschriebenen $4n$ Ecks oder $f'' = \sqrt{f'F'}$. Da nun nach 12 $f'' = {^1/_2}\, ru'$, so ist $^1/_2\, ru' = \sqrt{^1/_2 ru \,.\, {^1/_2} rU'}$ und $u' = \sqrt{uU'}$.

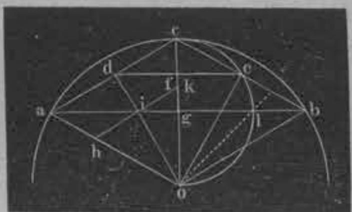
§. 14.

Construction und Berechnung regulärer $2n$Ecke von gleichem Umfange und Inhalte mit regulären eingeschriebenen nEcken.

a. Construction und Berechnung eines regulären (isoperimetrischen) $2n$Ecks von gleichem Umfange mit einem regulären nEcke.

Auflösung und Beweis. Sind ab, ac, cb die Seiten des regulären n- und $2n$Ecks, so ist die Verbindungslinie der Halbirungspunkte zweier benachbarten Seiten des regulären $2n$Ecks (de) die Seite des isoperimetrischen Vielecks von $2n$ Seiten und eo und fo bilden seine großen und kleinen Radien (r' und ϱ').

Fig. 121.



Da ac und cb in d und e halbirt sind, so ist $de = \frac{1}{2}\, ab$ und daher die Seite des verlangten $2n$Ecks von gleichem Umfange. Um das Verhältniß der großen und kleinen Radien zu bestimmen, beachte man, daß

$$1.\ fo = go + fg = \varrho + \tfrac{1}{2} cg = \varrho + \tfrac{1}{2}\,(co - go)$$

$$\text{oder } 2.\ \varrho' = \varrho + \tfrac{1}{2} r - \tfrac{1}{2}\varrho = \frac{r + \varrho}{2}$$

d. h. **der kleine Radius eines isoperimetrischen $2n$Ecks ist das arithmetische Mittel zwischen dem großen und kleinen Radius des gegebenen nEcks.**

Im rechtwinkligen Dreiecke ceo ist $oe = \sqrt{co \,.\, fo}$ oder

$$1.\ r' = \sqrt{r\varrho'}$$

d. h. **der große Radius eines isoperimetrischen $2n$Ecks ist die mittlere Proportionale zwischen dem großen Radius des nEcks und dem kleinen Radius des isoperimetrischen $2n$Ecks.**

b. Construction und Berechnung eines regulären $2n$Ecks von gleichem Inhalte mit einem gegebenen nEcke. —

Construction und Beweis. Soll zu dem regulären nEcke, dessen Seite ab ist, ein reguläres $2n$Eck von gleichem Inhalte gezeichnet werden, so muß das Bestimmungsdreieck ado des gegebenen Polygons in ein gleich großes gleichschenkliges Dreieck hko verwandelt werden. Da nun beide Dreiecke denselben Winkel hok haben, so muß $ao \,.\, ag = oh \,.\, ok = oh^2$ sein und $oh = \sqrt{ao \,.\, ag}$ oder

$$1.\ r' = \sqrt{r \,.\, \varrho}$$

d. h. **der große Radius eines regulären $2n$Ecks von gleichem Inhalte mit einem nEcke ist die mittlere Proportionale zwischen seinem großen und kleinen Radius.**

Die Construction der mittleren Proportionale ist in der Figur durch punktirte Linien angedeutet.

Um die Größe des kleinen Radius io oder ϱ' zu bestimmen, beachte man, daß $\triangle\, hok \sim \triangle\, doe$ und daß daher

$$hk : de = io : fo$$

oder $hk : \frac{1}{2}\, ab = io : fo$. Da nun nach der Aufgabe

$$hk \,.\, \frac{io}{2} = \tfrac{1}{2}\, ab \,.\, \frac{go}{2} \text{ sein soll, so ist auch}$$

$$hk : \tfrac{1}{2}\, ab = go : io \text{ und daher}$$

$$io : fo = go : io$$

$$\text{oder } \varrho' : \frac{r + \varrho}{2} = \varrho : \varrho'$$

$$\text{und } \varrho' = \sqrt{\varrho \,.\, \frac{r + s}{2}}.$$

d. h. **der kleine Radius eines $2n$Ecks von gleichem Inhalte mit dem nEcke ist die mittlere Proportionale zwischen dem kleinen Radius und dem arithmetischen Mittel des großen und kleinen Radius.**

Bemerkung. Die letzten Sätze sind im Leitfaden besonders deshalb zusammengestellt, um dem Schüler das wichtigste Material für die elementare Berechnung der Zahl π zusammenhängend darzubieten. — Sie können großentheils dem Privatfleiße der Schüler überlassen werden.

Aufgaben.

1. Wie schneiden sich die Diagonalen des regulären Fünfecks?

2. Warum halbirt die Centrale, aus der Winkelspitze eines regulären Fünfecks gezogen, die Gegenseite des Fünfecks?

3. Wie groß ist die Seite des umschriebenen regulären Dreiecks?
$x = 2\sqrt{3}$.

4. Wie groß ist die Seite des eingeschriebenen Zwölfecks?
$x = \frac{r}{2}\,(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

5. Wie groß ist die Seite des eingeschriebenen Zwanzigecks?
$x = r\sqrt{2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$.

6. Wie findet man aus der Seite des $2n$ Ecks die Seite des n Ecks?
$x = \frac{s}{r} \sqrt{4r^2 - s^2}$.

7. Welche regulären Polygone kann man anwenden, um einen Fußboden mit ihnen ohne Lücken zu bedecken, wenn man nur Polygone von gleicher Seitenzahl, oder Polygone von zwei verschiedenen oder drei verschiedenen Seitenzahlen anwenden will?

8. Was für eine Figur entsteht, wenn man dieselbe Diagonale eines Quadrates von den Ecken aus auf den Seiten abschneidet und die Theilpunkte an den Ecken, durch gerade Linien, verbindet. Warum?

9. Wie findet man bei regulären Figuren aus der Seite den Radius und die übrigen Stücke?

10. Wie findet man den Inhalt der regulären Figuren aus dem kleinen Radius?

11. Wie groß sind die Radien von drei gleichen Kreisen, die in einen größern Kreis, dessen Radius gegeben ist, beschrieben werden sollen? Wie werden die Kreise construirt?

12. Wie groß sind die Radien von vier gleich großen Kreisen, die in einen größern Kreis beschrieben werden sollen u. s. w.? Wie die vorige Aufgabe zu berechnen und zu construiren.

13. Wie verhalten sich die Flächen, kleinen Radien u. s. w. der einzelnen berechneten regulären Figuren zu einander und welche von ihnen stehen in einfachen, leicht in Worten auszudrückenden Verhältnissen zu einander?

14. Welcher Grenze nähern sich die kleinen Radien immer mehr, je größer die Seitenzahl wird?

15. Welcher Unterschied findet zwischen der Bewegung eines Punktes bei der Construction des Umfanges eines regulären n Ecks und der Kreisperipherie statt?

16. Wann sind beide Constructionen identisch?

Bemerkung. Der Schüler versäume nicht, sich durch ähnliche Fragen den Unterschied und die Aehnlichkeit zwischen Polygon- und Kreisconstruction zu veranschaulichen, um sich den Uebergang zu den folgenden Sätzen zu bahnen, und ihr Verständniß sich zugänglicher zu machen. —

Fünfzehnter Abschnitt.

Von der Kreisberechnung.

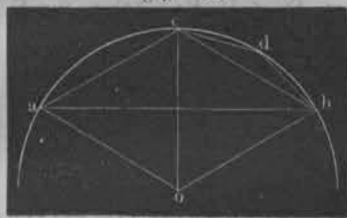
Rectification der Kreislinie und Quadratur der Kreisfläche.

§. 1.

Inhalt und Umfang der eingeschriebenen Polygone werden bei fortgesetzter Verdoppelung immer größer und nähern sich von innen immer mehr dem Kreise und seinem Umfange.

Beweis: Sind ac und cb die Seiten irgend eines $2n$ Ecks und ab die Seite des n Ecks, so wird

Fig. 122.



a. der Inhalt des $2n$ Ecks um das n fache des gleichschenkligen Dreiecks (abc), das die Seite des n Ecks zur Basis und die Seite des $2n$ Ecks zu Schenkeln hat, größer werden und sich daher bei jeder folgenden Verdoppelung immer mehr dem Kreise nähern,

b. ist $ac > \frac{1}{2}\, ab$. Multiplicirt man diese Ungleichheit mit $2n$, so ist $2n \,.\, ac > 2n \,.\, \frac{1}{2} ab$ oder $u' > u$ d. h. auch die Umfänge nähern sich der Kreislinie immer mehr bei jeder folgenden Verdoppelung. Wird die Verdoppelung ohne Ende fortgesetzt, so wird auch der Unterschied zwischen Umfang und Peripherie, sowie zwischen Polygon und Kreis unendlich klein oder der Kreis ist die äußere Grenze des Wachsthums des eingeschriebenen Polygons.

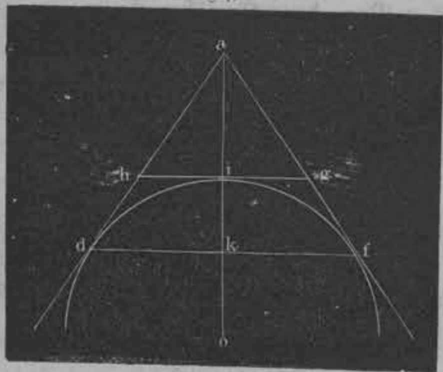
§. 2.

Inhalt und Umfang der umschriebenen Polygone werden bei fortgesetzter Verdoppelung immer kleiner und nähern sich von außen immer mehr dem Kreise und seinem Umfange.

Beweis: Ist ad die halbe Seite irgend eines umschriebenen n Ecks und hg die Seite des umschriebenen $2n$ Ecks, so wird bei jeder Seitenverdoppelung

a. der Inhalt des $2n$Ecks um das $n$fache des gleichschenkligen Dreiecks (ahg), das die Seite des $2n$Ecks zur Basis und Stücke der Seiten des nEcks zu Schenkeln hat, kleiner und wird sich bei jeder folgenden Verdoppelung mehr dem Kreise von außen nähern.

Fig. 123.



b. Ist $hi < ah$. Da nun $dh = hi = ig$, so ist $hi + ig < ah + dh$ oder $hg < ad$ oder $S' < \frac{1}{2} S$; daher $2nS' < 2n \cdot \frac{1}{2} S$ oder $U' < U$.

Bei Verdoppelung ohne Ende wird der Kreis die innere Grenze der Abnahme des umschriebenen Polygons. —

§. 3.

Der Kreis kann als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet werden, dessen großer und kleiner Radius gleich sind.

Wenn gleich diese Behauptung schon aus den vorigen Sätzen folgt, so kann sie auch dadurch noch erhärtet werden, daß jedes Polygon von unendlich vielen Seiten durch unendlich kleine Drehungen und unendlich kleine Fortschreitungen, gerade so, wie der Kreis erzeugt wird, während bei endlichen Polygonen die Construction sprungartig erfolgt, wie aus beistehender Figur sich ergibt. Wie groß ist bei der Construction des Zwölfecks jeder Fortschritt und wie groß jede Drehung? Wodurch kann das Stetige der Anschauung der begrifflichen Auffassung allein zugänglich gemacht werden?

Fig. 124.

§. 4.

Folgerungen.

a. **Jeder Kreis ist einem Dreiecke flächengleich, das die Peripherie zur Basis und den Radius zur Höhe hat.**

Will man die Folgerung aus dem vorigen Paragraphen nicht gelten lassen, so kann man sich die Peripherie in unendlich viele Theile getheilt und durch jeden Theilpunkt Linien gezogen denken, welche dann ebensoviele Sectoren begrenzen, die unter sich gleiche Basis und Höhe haben. Bei der unendlichen Kleinheit der Basis können diese ebensogut als Dreiecke betrachtet werden, die einem Dreiecke gleich sind, das die ganze Peripherie zur Basis und den Radius zur Höhe hat. —

b. **Alle Kreise sind ähnliche Figuren.**

Alle Kreise sind auf dieselbe Weise entstanden; alle gleichliegenden Punkte in ihnen schließen ähnliche geradlinige Figuren ein.

c. **Die Kreislinien verhalten sich wie die Radien oder Durchmesser und die Kreisflächen wie deren Quadrate.**

Folgt unmittelbar aus b. und §. 11.

d. **In allen Kreisen ist das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie oder des Radius zur halben Peripherie dasselbe.**

Bezeichnen wir die Radien verschiedener Kreise mit R und r, ihre Durchmesser mit D und d, sowie ihre Peripherien mit P und p, so ist nach c: $P : p = D : d = R : r = \frac{1}{2}P : \frac{1}{2}p$ und daher auch durch Vertauschung der mittleren Glieder $P : D = p : d$ und $\frac{1}{2}P : R = \frac{1}{2}p : r$. —

Es kommt vor allen Dingen nun zunächst auf die Bestimmung dieses Verhältnisses an, und bevor diese Aufgabe nicht gelöset ist, können auch die andern Rechnungsaufgaben nicht erledigt werden. Die Geschichte der Kreisberechnung dreht sich um die Geschichte der Aufsuchung und Berechnung der Zahl π, mit welchem Buchstaben man herkömmlich die unbekannte oder näherungsweise bestimmte Zahl bezeichnet, welche das Verhältniß des Durchmessers zur Pheripherie oder des Radius zur halben Peripherie ausdrückt, wenn Durchmesser oder Radien als Einheiten angenommen werden.

§. 5.

Grundaufgabe der Kreisrechnung.

Ist der Durchmesser 1, so ist die Peripherie oder
$\pi = 3{,}14159265 \ldots$

Lösung der Aufgabe. Alle elementaren Lösungen unserer Aufgabe stützen sich auf die Sätze, daß der Kreis eine reguläre Figur von unendlich vielen Seiten ist, und daß er die gemeinschaftliche Grenze der ein- und umschriebenen Vielecke ist, der man sich von innen und außen durch Verdoppelung der Seiten der Vielecke immer mehr nähern kann. — Die verschiedenen Lösungen unterscheiden sich dadurch wesentlich von einander, daß die einen vom Radius oder Durchmesser als der bekannten Größe (Einheit) ausgehen, um den Umfang oder Inhalt zu bestimmen; daß die anderen dagegen vom Inhalte oder Umfange als bekannter Einheit ausgehen, um den Radius oder Durchmesser zu bestimmen. —

Die erste Klasse von Lösungen geht von irgend einem regulären Vielecke aus, dessen Umfang (Sechseck) oder Flächeninhalt (Viereck) zu dem Radius oder Durchmesser in einfachem Verhältnisse steht, um mit Anwendung der Sätze über die Berechnung der regulären Vielecke von doppelt so viel Seiten und mit Benutzung der vier Formeln für Umfang und Inhalt der Vielecke

1. $u = ns$	1. $f = \frac{ns}{4}\sqrt{4r^2 - s^2}$
2. $U = \frac{2nsr}{\sqrt{4r^2 - s^2}}$ und	2. $F = \frac{nr^2 s}{\sqrt{4r^2 - s^2}}$
3. $u' = \sqrt{uU}$	3. $f' = \sqrt{fF}$
4. $U' = \frac{2uU}{u+U}$	4 $F' = \frac{2fF}{f+f}$.

Die Umfänge oder Inhalte ein- und umschriebener Vielecke zu finden, die bis zu einer bestimmten Decimalstelle übereinstimmen. Die übereinstimmenden Ziffern in den Umfangs- und Flächenzahlen gelten dann mit Recht als Umfang oder Inhalt des Kreises, dessen Radius oder Durchmesser 1 ist. —

Die Lösungen, welche von der Peripherie oder dem Inhalte als bekannter Größe ausgehen um den Radius oder Durchmesser zu bestimmen, benutzen die Sätze über die umfanggleichen oder flächengleichen Vielecke und die Formeln für die großen und kleinen Radien:

Radien umfanggleicher	inhaltgleicher Figuren
1. $r' = \sqrt{r\varrho'}$	1. $r' = \sqrt{r\varrho}$
2. $\varrho' = \frac{r+\varrho}{2}$	2. $\varrho' \sqrt{\varrho \cdot \frac{r+\varrho}{2}}$

um bei hinreichend fortgesetzter Verdoppelung der Seitenzahl Vielecke zu erhalten, deren große und kleine Radien nicht mehr von einander verschieden sind, sondern bis auf eine bestimmte Decimalstelle übereinstimmen, die also

für Kreisumfänge oder Kreisflächen von gleichem Umfange oder Inhalte gelten können, und deren Radien man auf diese Weise gefunden hat. —

Alle diese Methoden sind zwar sehr weitläufig, erfordern aber keine anderen Rechnungen als die vier Species und die Quadratwurzelausziehung und geben die Zahl π für praktische Zwecke hinreichend genau. —

Die Zahl π ist längst durch die Hilfsmittel der Analysis bis zu 156 Decimalstellen, ja neuerdings bis zu 500 Decimalstellen berechnet und da man außerdem in der Analysis streng nachweisen kann, daß sie eine irrationale Zahl ist, so darf dem Schüler die elementare Rechnungsquälerei, die Zahl π selbst zu finden, erlassen bleiben. Um ihm jedoch die elementaren Methoden concret an einem Beispiele zu veranschaulichen, mag die Berechnung des Radius aus isoperimetrischen regulären Polygonen vollständig hergestellt sein. —

Berechnung der Zahl π aus dem Umfange des Quadrates. Wenn r und ϱ den großen und kleinen Radius des regulären Vierecks bezeichnen, dessen Seite = 1 ist und $r_1\ \varrho_1$; $r_2\ \varrho_2$; $r_3\ \varrho_3$ u. s. w. die gleichnamigen Radien der isoperimetrischen 8-, 16-, 32-Ecke, so ist durch wiederholte Anwendung der Formeln 1 und 2:

$\varrho = \frac{1}{2}$		$= 0{,}500000000$	1,207106781
$r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$		$= 0{,}707106781$	
$\varrho_1 = \frac{r+\varrho}{2}$		$= 0{,}603553390$	1,266834872
$r_1 = \sqrt{r\,\varrho_1}$		$= 0{,}653281482$	
$\varrho_2 = \frac{r_1+\varrho_1}{2}$		$= 0{,}628417436$	1,269146298
$r_2 = \sqrt{r_1\,\varrho_2}$		$= 0{,}640728862$	
$\varrho_3 = \frac{r_2+\varrho_2}{2}$		$= 0{,}634573149$	1,272216726
$r_3 = \sqrt{r_2\,\varrho_3}$		$= 0{,}637643577$	
$\varrho_4 = \frac{r_3+\varrho_3}{2}$		$= 0{,}636108363$	1,272983870
$r_4 = \sqrt{r_3 \cdot \varrho_4}$		$= 0{,}636875507$	
$\varrho_5 = \frac{r_4+\varrho_4}{2}$		$= 0{,}636491935$	1,273175627
$r_5 = \sqrt{r_4 \cdot \varrho_5}$		$= 0{,}636683692$	
$\varrho_6 = \frac{r_5+\varrho_5}{2}$		$= 0{,}636587813$	1,273223564
$r_6 = \sqrt{r_5 \cdot \varrho_6}$		$= 0{,}636635751$	

$$\left.\begin{aligned} \varrho_7 &= \frac{r_6+\varrho_6}{2} &= 0{,}636611782 \\ r_7 &= \sqrt{r_6\cdot\varrho_7} &= 0{,}636623766 \end{aligned}\right\} 1{,}273235548$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho_8 &= \frac{r_7+\varrho_7}{2} &= 0{,}636617774 \\ r_8 &= \sqrt{r_7\cdot\varrho_8} &= 0{,}636620770 \end{aligned}\right\} 1{,}273238544$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho_9 &= \frac{r_8+\varrho_8}{2} &= 0{,}636619272 \\ r_9 &= \sqrt{r_8\cdot\varrho_9} &= 0{,}636620021 \end{aligned}\right\} 1{,}273239293$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{10} &= \frac{r_9+\varrho_9}{2} &= 0{,}636619646 \\ r_{10} &= \sqrt{r_9\cdot\varrho_{10}} &= 0{,}636619833 \end{aligned}\right\} 1{,}273239479$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{11} &= \frac{r_{10}+\varrho_{10}}{2} &= 0{,}636619739 \\ r_{11} &= \sqrt{r_{10}\cdot\varrho_{11}} &= 0{,}636619783 \end{aligned}\right\} 1{,}273239525$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{12} &= \frac{r_{11}+\varrho_{11}}{2} &= 0{,}636619762 \\ r_{12} &= \sqrt{r_{11}\cdot\varrho_{12}} &= 0{,}636619774 \end{aligned}\right\} 1{,}273239536$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{13} &= \frac{r_{12}+\varrho_{12}}{2} &= 0{,}636619768 \\ r_{13} &= \sqrt{r_{12}\cdot\varrho_{13}} &= 0{,}636619771 \end{aligned}\right\} 1{,}273239539.$$

Aus der Rechnung geht hervor, daß ϱ_{13} und r_{13} in den Ziffern 0,63661977 übereinstimmen. Dividirt man nun den Umfang des ursprünglichen Vierecks (4) durch den Radius 0,63661977, so findet man den Quotienten 6,2831853 als Verhältnißzahl der Peripherie zum Radius oder 3,1415926 als Verhältnißzahl der Peripherie zum Durchmesser.

Bemerkung. Archimedes fand als Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie 7 : 22; Metius 113 : 355; Ludolf von Köln 1 : 3,14159265 — bis auf 32 Stellen. Die Zahl π dient zur Bestimmung der Genauigkeit der andern Verhältnißzahlen; je früher sie von ihr abweichen, desto ungenauer sind sie. — Abgekürzt wird die Zahl π gewöhnlich so: 3,1415927 oder 3,1416 oder 3,14. Im gemeinen Leben reicht man mit zwei Stellen schon aus. Sehr bequem ist die Abkürzung 3,1416, da sie viele Factoren enthält. Welche? In allen Fällen jedoch, wo vier oder mehr Stellen von π gebraucht werden, ist die Rechnung mit Logarithmen bequemer. — Dem Lehrer wird an dieser Stelle Gelegenheit geboten, die Schüler auf den Fleiß und die Ausdauer der älteren Mathematiker hinzuweisen, die trotz ihrer unvollkommenen Methoden das Verhältniß genauer bestimmten, als es die Praxis je braucht.

Fragen: Wie lang ist die Peripherie eines Kreises, dessen Radius 1′ ist, in Zoll und Linien ausgedrückt? Auf wie viel Stellen muß mit π gerechnet werden, wenn die Radiuseinheit eine Meile beträgt und der Fehler keine Ruthe betragen soll? —

§. 6.

Berechnung der Kreisperipherie.

Die Peripherie ist dem Producte aus Durchmesser und π gleich.

Formel: $p = d\pi = 2r\pi$.

Denn da die Peripherien sich wie die Radien oder Durchmesser verhalten, so ist $1 : d = \pi : p$ und daher $p = d.\ \pi = 2r\pi$. Was bedeutet in dieser Formel π?

§. 7.

Berechnung des Durchmessers.

Der Durchmesser ist dem Quotienten, aus der Peripherie dividirt, durch die Zahl π gleich.

Formel: $d = \dfrac{p}{\pi}$; $r = \dfrac{p}{2\pi} = \dfrac{\frac{1}{2}p}{\pi}$

folgt unmittelbar aus der vorigen Gleichung durch Auflösung derselben für d. Was bedeutet in der Formel $\dfrac{1}{\pi}$? Wie groß ist $\dfrac{1}{\pi}$ in den ersten vier Bruchstellen?

§. 8.

Berechnung der Kreisfläche.

Die Kreisfläche ist dem Produkte aus der Quadratzahl des Radius mit π gleich.

Formel: $K = r^2\pi = \dfrac{d^2\pi}{4}$

Beweis: Betrachtet man den Kreis als Dreieck, dessen Höhe der Radius und dessen Basis die Peripherie ist, so ist

$$K = \frac{rp}{2} = \frac{r}{2}.\ 2r\pi = r^2\pi.$$

Fragen: Was wird aus der Formel, wenn $r = 1$ ist? Was bedeutet demnach π in dieser Formel?

§. 9.

Berechnung des Radius aus der Kreisfläche.

Der Radius ist der Wurzel aus dem Quotienten des Kreises, dividirt durch π gleich

Formel: $r = \sqrt{\frac{K}{\pi}} = \sqrt{K\frac{1}{\pi}}$

folgt unmittelbar aus 8 durch Auflösung für r. Was bedeutet in der Formel $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$? Berechne $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ auf vier Bruchziffern.

§. 10.

Berechnung eines Bogens aus Radius und Centriwinkel.

Bezeichnet man den Bogen mit b und den Centriwinkel mit β, so ist

Formel: $b = \frac{r\,\pi}{180}\,.\,\beta.$

Beweis: Da die ganze Peripherie $2\,r\,\pi$, so ist der Bogen eines Grades $= \frac{2\,r\,\pi}{360}$ und die Bogen der β Grad enthält $= \frac{2r\,\pi}{360}\,\beta$.

$= \frac{r\,\pi}{180}\,\beta$. —

Fragen: Was bedeutet in dieser Formel $\frac{\pi}{180}$ und wie heißen die ersten sechs Bruchziffern des Quotienten? Wie läßt sich die Formel in Worte einkleiden, wenn $\frac{\pi}{180}$ als Länge eines Bogengrades ausgedrückt wird?

§. 11.

Berechnung des Winkels oder Radius aus dem Bogen u. s. w.

Aus der Formel oder Gleichung des vorigen Paragraphen ergeben sich durch Auflösung derselben für β und r noch die Formeln:

1. $\beta = \frac{180\,b}{r\,\pi}$

2. $r = \frac{180\,b}{\beta\,\pi}$

Was wird aus der Gleichung für β, wenn $r = b$ gesetzt wird? Berechne die vier ersten Bruchziffern von $\frac{180}{\pi}$. Was bedeutet $\frac{180}{\pi}$? Drücke $\frac{180}{\pi}$ in Grad, Minuten und Secunden aus? Drücke beide Formeln in Worten aus.

§. 12.

Berechnung eines Sectors aus Radius und Centriwinkel.

Bezeichnet man den Centriwinkel mit α und den zugehörigen Sector mit S_a, so ist $S_a = \frac{r^2\,\pi}{360}\,.\,\alpha$

Beweis: Der Flächeninhalt des ganzen Kreises ist nach §. 8 $= r^2\,\pi$, daher der Flächeninhalt eines Sectors von einem Grad $= \frac{r^2\,\pi}{360}$ und von α Grad $= \frac{r^2\,\pi}{360}\,.\,\alpha$.

Was bedeutet in der Formel $\frac{\pi}{360}$? Berechne $\frac{\pi}{360}$ auf vier Bruchstellen. Wie läßt sich die Formel in Worten ausdrücken, wenn $\frac{\pi}{360}$ als Gradsector bezeichnet wird. —

§. 13.

Berechnung des Radius oder Centriwinkels aus dem Sector und Centriwinkel oder Radius.

Durch Auflösung der Gleichung $S_a = \frac{r^2\,\pi}{360}\,.\,\alpha$ erhält man noch die Gleichungen

1. $\alpha = \frac{360\ .\ S_a}{r^2\,\pi} = \frac{360}{\pi}\,.\,\frac{S_a}{r^2}$

2. $r = \sqrt{\frac{360\ S_a}{\pi\,\alpha}} = \sqrt{\frac{360}{\pi}\,.\,\frac{S_a}{r}}$

Drücke die Formeln in Worten aus und berechne $\frac{360}{\pi}$ mit vier Bruchziffern.

§. 14.

Berechnung eines Kreisabschnittes aus Radius und Centriwinkel.

Jeder Kreisabschnitt ist dem Unterschiede zwischen seinem Kreisausschnitte und dem gleichschenkligen Dreiecke gleich, das durch die Radien, welche nach den Endpunkten der Sehne gezogen sind, gebildet wird. Nun ist nicht nur der Ausschnitt, sondern auch das gleichschenklige Dreieck durch Radius und Centriwinkel bestimmt, also auch ihr Unterschied oder der Kreisabschnitt. Da wir aber bisher nicht gelernt haben, Figuren und namentlich Dreiecke aus Seiten und Winkeln zu berechnen, so müssen wir diese Aufgabe dem Theile der Geometrie überlassen, der aus Linien und Winkeln die fehlenden Stücke in Figuren zu finden lehrt, d. h. der ebenen Trigonometrie. —

Soll die Aufgabe an dieser Stelle gelöst werden, so muß noch eine abhängige Linie (etwa die Sehne) gemessen und als unabhängiger Bestandtheil in Rechnung gebracht werden. — Nach welcher Formel wird in diesem Falle das Dreieck am bequemsten berechnet? — Wie groß ist der Abschnitt eines Kreises, dessen Radius $= 12$ und dessen Centriwinkel $= 60^0$ ist? Wie groß ist der Abschnitt eines Kreises, der zu einem Winkel von 90^0 oder 36^0 gehört? Welche Abschnitte lassen sich streng wissenschaftlich an dieser Stelle berechnen?

§. 15.

Berechnung der ringförmigen Figur zwischen zwei concentrischen Kreisen.

Sind R und r die Radien der concentrischen Kreise, so ist der Ring oder

$$Rg = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\ \pi = (R+r)\ (R-r)\ \pi$$

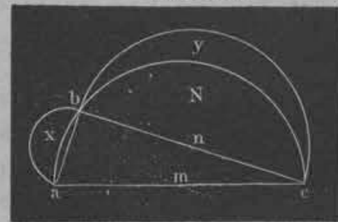
Warum? Welche Formel verdient beim Rechnen den Vorzug? Wie groß ist der Radius eines Kreises, der ähnlichen Inhalt mit dem Ringe hat? Wie verhält sich der Radius dieses Kreises zu den Radien der concentrischen Kreise? Wie läßt sich dieser Kreis bequem construiren? Lassen sich auf diese Weise nur concentrische Kreiscurse berechnen oder auch andere Figuren.

§. 16.

Berechnung der mondförmigen Flächen des Hippokrates.

Werden über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks abc, wie in beistehender Figur, Halbkreise construirt, so sind die beiden mondförmigen Figuren, oder die sogenannten lunulae Hippocratis dem Dreiecke abc gleich.

Fig. 125.



Beweis: Bezeichnet man die mondförmigen Figuren mit x und y und die Abschnitte über bc und ab mit N und O, so ist der Halbkreis über der Hypotenuse den beiden Halbkreisen über den Katheten gleich (X. §. 17).

$$\begin{aligned} \text{Da nun der Halbkreis über } ac &= \triangle\, abc + N + O \\ \text{und ,, } bc &= y + N \\ ab &= x + O \\ \hline \text{so ist } \triangle\, abc + N + O &= x + y + N + O \\ \text{oder } \triangle\, abc &= x + y. \end{aligned}$$

In welchem Falle sind die beiden lunulae gleich? Welche Wichtigkeit hat der kleine Satz für die Quadratur des Kreises? Wie groß sind die Monde über den Katheten des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Seiten 3, 4, 5 sind?

§. 17.

Rectification der Kreislinie und Quadratur der Kreisfläche.

Unter Rectification und Quadratur der Curven versteht die höhere Geometrie im Allgemeinen die aus der Gleichung der Curven hergeleiteten Gleichungen zur Berechnung bestimmter Theile der Curven oder Curvenflächen. —

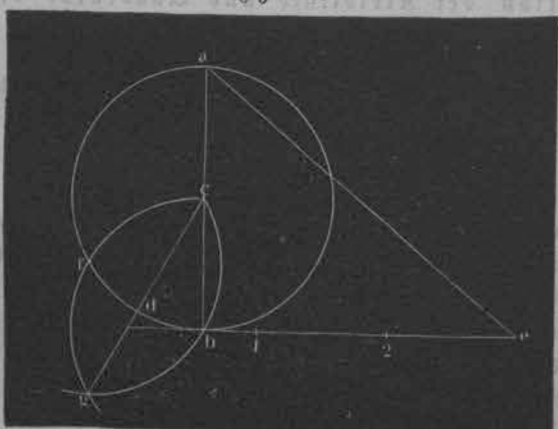
Unter Rectification und Quadratur des Kreises versteht aber die elementare Geometrie nicht die Aufsuchung der Formeln für die Berechnung der Peripherie und Kreisfläche, die wir früher (in 6 und 8) kennen gelernt haben, sondern die Angabe einer einfachen, nur gerade Linie und Kreis oder Lineal und Zirkel in Anspruch nehmenden, Construction, durch welche die Peripherie in eine gerade Linie und die Kreisfläche in eine ebene geradlinige Figur, am einfachsten in ein Quadrat verwandelt wird, sowie wir früher jede geradlinige Figur haben quadriren lernen. —

Die arithmetische Rectification und Quadratur ist durch Archimedes, Metius, Ludolf von Köln u. s. w. längst gefunden, die geometrische aber harret noch immer ihrer Lösung. — Nachdem in früheren Jahrhunderten die besten Köpfe sich an der Lösung der Aufgabe vergeblich versucht haben, hat sich in der neuern Zeit ein großer Widerwillen gegen die angeblichen Lösungen der Aufgabe geltend gemacht und ein zweideutiges Achselzucken, wenn nichts Schlimmeres, ist der Lohn für diejenigen, die sich jetzt noch ernstlich mit der Aufgabe beschäftigen, besonders seitdem die Pariser Akadamie die ihr eingereichten Schriften über die Quadratur uneröffnet ad acta legt. —

Die Unmöglichkeit der geometrischen Lösung ist, soviel Verfasser weiß, bis jetzt noch nicht gezeigt. Sie folgt keineswegs aus der Irrationalität der Zahl π, da sich viele andere irrationale Ausdrücke, z. B. Quadratwurzeln construiren lassen. Ebensowenig stellt sich die Eigenschaft des Krummen überhaupt der Rectification und Quadratur in den Weg, da sich elementar die Cyloide rectificiren ($= 8r$) und außer den lunulis auch die Parabel quadriren läßt. Die Lösung der einen Aufgabe ist übrigens durch die Lösung der andern mitgegeben, denn wenn die Peripherie gegeben ist, so ist auch das dem Kreise gleiche Dreieck und das ihm gleiche Quadrat gegeben und umgekehrt. —

Mit den bisher völlig gescheiterten Versuchen einer strengen geometrischen Rectification und Quadratur des Kreises, sind nicht die einfachen, absichtlich und mit Verstand gesuchten, Näherungsconstructionen zu verwechseln, von denen dem Schüler zum Schluß die beiden einfachsten und brauchbarsten mitgetheilt werden sollen, um an ihrer Discussion ihn bei der Repetition zu üben zu können.

Fig. 126.



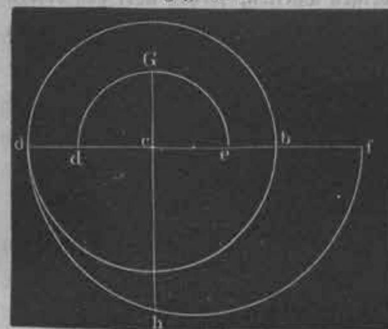
A. Näherungs-Rectification des Bachalsky.

Man ziehe den Durchmesser ab, und durch den Endpunkt b eine Tangente be. Mit dem Halbmesser bc beschreibe man erst aus b und dann aus f Bögen, die sich in g schneiden. Zieht man nun noch cg, welche die Tangente in d trifft und trägt von d aus den Halbmesser dreimal auf de ab, so ist die Gerade ae sehr nahe der halben Peripherie gleich. Denn $ae = \sqrt{13\,{}^1/_3 - \sqrt{12}}$. Warum? Wie groß ist der Fehler?

B. Näherungs-Quadratur.

Man ziehe den Durchmesser ab, theile den Radius ac in fünf und den Radius cb in zwei gleiche Theile und verlängere den Radius cb um $bf = ce$.

Fig. 127.



Construirt man nun über ab und de d. h. über der Entfernung des Halbirungspunktes und des dritten Theilpunktes Halbkreise nach entgegengesetzten Seiten, so ist das Perpendikel Gh, das im Mittelpunkte bis zu diesen Halbkreisen errichtet wird, die Seite eines Quadrates, das dem Kreise an Größe sehr nahe kommt. — Denn $Gh = \sqrt{{}^3/_{10}} + \sqrt{{}^3/_2}$. Warum? Wie groß ist der Fehler?

Fragen und Aufgaben.

1. Aus welcher Gleichung für die Kreisberechnung können alle übrigen abgeleitet werden?
2. Welche vier unter den Gleichungen für den Kreis sind als Hauptgleichungen für die directen Aufgaben vorzugsweise zu merken? (Man kann sie passend Peripherie-Kreis-Bogen-Sectorgleichung nennen).
3. Welche verschiedene Bedeutungen kann π haben?
4. Einen Kreis zu construiren, welcher der Summe zweier Kreise gleich ist.
5. „ „ „ „ „ „ Differenz „ „ „ „
6. „ „ „ „ „ dem $n$fachen eines „ „ „
7. „ „ „ „ „ $\frac{m}{n}$ eines gegebenen Kreises ist.
8. Wie groß ist der Ring zwischen concentrischen Kreisen, deren Radien 4′ und 5′ sind?

9. Wie groß ist der Centriwinkel eines Bogens, der dem 3 (n) fachen des Radius gleich ist. Wie groß darf n höchstens in ganzen Zahlen genommen werden, wenn der Centriwinkel kleiner als ein voller Winkel bleiben soll?

10. Wie groß ist der Centriwinkel eines Sectors, dessen Umfang a, der halben b, der ganzen Peripherie gleich ist?

11. Wie groß ist das in einen Kreis beschriebene Quadrat?

12. Wie groß ist der um ein gleichseitiges Dreieck beschriebene Kreis?

13. Wie groß ist die Figur zwischen drei gleichen, sich von außen berührenden Kreisen?

14. Wie groß ist der Radius des in einen Quadranten beschriebenen Kreises?

15. Wenn man den Durchmesser eines Kreises in fünf gleiche Theile theilt, über dem ersten und unter den übrigen Theilen, ferner über den beiden ersten und unter den übrigen Theilen u. s. w. Halbkreise beschreibt, wie groß sind die Inhalte und Umfänge der dadurch gebildeten Figuren?

16. Wie verhalten sich die Centriwinkel oder Bogen gleicher Sectoren in ungleichen Kreisen?

Trigonometrie.

Einleitung.

§. 1.

Die Größe aller geometrischen Constructionen wird entweder unmittelbar durch Messung oder mittelbar durch Rechnung gefunden.

§. 2.

Die Größe der beiden Grundconstructionen, der geraden Linie und des Winkels kann unmittelbar und mittelbar bestimmt werden, während die Größe aller übrigen aus ihnen nach einem bestimmten Gesetze gebildeten, geschlossenen Constructionen nur mittelbar durch Rechnung gefunden werden kann.

§. 3.

Die unmittelbare Messung von längern geraden Linien zwischen zwei beliebig gegebenen Punkten stößt immer auf große, wenn nicht geradezu auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Die Messung eines Winkels dagegen zwischen zwei gegebenen Linien oder Richtungen hat meistens gar keine Schwierigkeiten und läßt sich bei der Vollkommenheit der heutigen Winkelinstrumente mit größter Genauigkeit ausführen. Man vermeidet daher die (unmittelbare) Messung von Linien so viel als möglich und sucht an ihre Stelle die Berechnung zu setzen, während man umgekehrt Winkel gern unmittelbar zu messen sucht, so oft es irgend geht. Bei gezeichneten Linien und Winkeln findet das Gegentheil statt; Linien lassen sich genauer messen als Winkel, da der Transporteur die Winkel höchstens bis auf einen Viertelgrad genau messen kann.

§. 4.

Soll die Größe irgend einer Construction durch Rechnung aus andern Constructionen gefunden werden, so ist unumgänglich nothwendig:

a. daß die gesuchte Construction auch wirklich von den gegebenen Constructionen abhänge und durch sie vollkommen und wo möglich ohne Zweideutigkeit bestimmt sei,

b. daß die gegebenen und als bekannt vorausgesetzten Stücke, Linien und Winkel, alle nach einerlei Maaß, einer bestimmten Linieneinheit, gemessen und in einer und derselben Einheit ausgedrückt seien, weil nur Zahlen derselben Einheit durch Rechnung mit einander verbunden werden können,

c. daß die Abhängigkeit unter den gegebenen und gesuchten Stücken durch Gleichungen unter ihren Maaßzahlen ausgedrückt sei,

d. daß man diese Gleichungen nach den Regeln der Algebra für die gesuchten Größen auflösen könne, um aus ihnen die letzteren auf die kürzeste Weise mit größter Genauigkeit zu berechnen, und endlich

e. daß man zu diesem Zweck die Gleichungen logarithmire oder, falls sie unlogarithmisch sind, durch logarithmische Gleichungen von gleichem Werthe zu ersetzen suche.

§. 5.

Die ebene Geometrie zeigt in Bezug auf die Größenbestimmung ihrer Constructionen:

a. wie die beiden einfachen Grundconstructionen unmittelbar gemessen werden,

b. wie durch eine bestimmte Anzahl dieser beiden Grundconstructionen und ihrer Größenverhältnisse zu einander in geschlossenen Constructionen alle übrigen Bestandtheile und die Fläche bestimmt sind,

c. wie durch Rechnung bei geradlinigen Constructionen die fehlenden geraden Linien und Flächen aus geraden Linien als ihren Bestimmungsstücken gefunden werden,

d. wie durch Rechnung bei Kreisconstructionen aus geraden Linien und Winkeln Bogen und Kreistheile und umgekehrt gefunden werden.

§. 6.

Die ebene Trigonometrie dagegen zeigt:

a. wie die Größe der Winkel durch Rechnung aus dem Größenverhältniß zweier gemessenen Linien, und umgekehrt wie das Größenverhältniß zweier Linien aus einem gemessenen Winkel gefunden werden kann,

b. wie die fehlenden Stücke jeder geradlinigen Figur und Kreisconstruction, sowie ihr Inhalt ohne Unterschied, ob Linien, ob Winkel, gefunden werden können.

§. 7.

Die ebene Trigonometrie zerfällt demnach in zwei Theile oder Abschnitte:

a. in die Bestimmung des Winkels durch gerade Linien und umgekehrt. (Goniometrie),

b. in die Berechnung der geradlinigen und Kreisconstructionen und ihrer Bestandtheile (Trigonometrie, Polygonometrie, Cyklometrie).

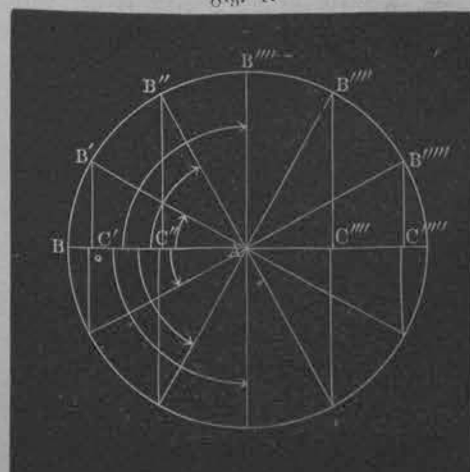
Erster Abschnitt.

Von der Bestimmung der Winkel durch gerade Linien (Goniometrie).

§. 8.

Alle Winkel, auch selbst diejenigen, welche größer als vier Rechte sind, können durch eine drehende Bewegung einer geraden Linie um ihren einen, festliegenden Endpunkt erzeugt werden, wie Figur 1 zeigt. Die Linie in ihrer ursprünglichen Lage, wie AB, heißt dann der unbewegliche, feste Schenkel, in jeder andern Lage aber der bewegliche Schenkel des Winkels. Die größere Drehung erzeugt den größern Winkel. Winkel, welche durch eine Drehung nach derselben Seite hin erzeugt sind, heißen in Bezug auf einander einstimmig; sind sie dagegen durch eine Drehung nach entgegengesetzter Seite hin erzeugt, so heißen sie widerstreitende Winkel, und der eine positiv,

Fig. 1.



der andere **negativ**, ganz ähnlich, wie bei geraden widerstreitenden Linien. Welcher von ihnen als positiv oder negativ betrachtet und mit + oder — bezeichnet wird, ist an sich willkürlich. Hat man aber die durch irgend eine Drehung erzeugten Winkel in einer geometrischen Untersuchung positiv genannt, so müssen die durch Drehung nach der entgegengesetzten Seite hin erzeugten negativ heißen. Man verkleinert einen Winkel oder man subtrahirt von einem Winkel einen andern Winkel, wenn man den beweglichen Schenkel des ursprünglich gegebenen Winkels rückwärts oder in entgegengesetzter Richtung dreht.

§. 9.

Winkel, welche einander durch Addition oder Subtraction zu $\frac{\pi}{2}$, R oder 90^0 ergänzen oder allgemein zu einer ungeraden Anzahl von Rechten, wie α und $90 - \alpha$ oder α und $90 + \alpha$, heißen **Complement-Winkel**; dagegen heißen diejenigen, welche einander auf ähnliche Weise zu π, $2R$ oder 180^0, oder allgemein zu einer geraden Anzahl von Rechten ergänzen, wie α und $180 - \alpha$ oder α und $180 + \alpha$, **Supplement-Winkel**. Zu dem Winkel von 30^0 sind die Winkel von 60^0 und 120^0 Complementwinkel, sowie die Winkel von 150^0 und 210^0 Supplementwinkel.

Wie heißen die Complementwinkel zu 1, 3, Rechten zu 25^0, 35^0 u. s. w.?

§. 10.

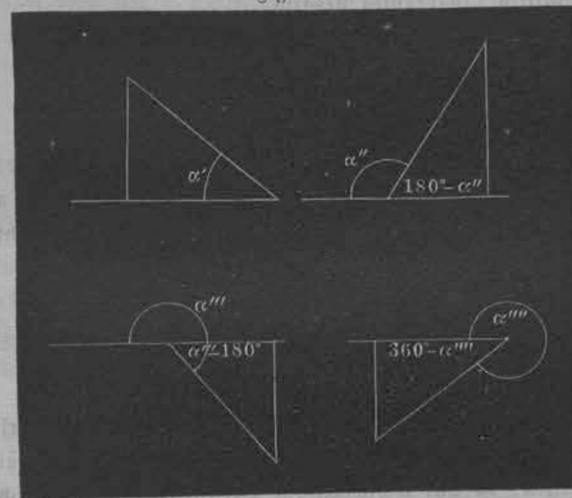
Winkel im ersten Quadranten heißen **spitze** (α'), im zweiten **stumpfe** (α''), im dritten **überstumpfe** (α''') und im vierten **untervolle** Winkel (α'''').

Fig. 2.

§. 11.

Wenn man dem beweglichen Schenkel eines Winkels α eine beliebige Länge giebt, ihn in diesem Falle auch wohl Radius (sinus totus) nennt und von seinem Endpunkte ein Perpendikel auf den unbeweglichen Schenkel

Fig. 3.



oder dessen Verlängerung über die Spitze hinausfällt, so entsteht jedesmal ein rechtwinkliges Dreieck, das entweder den gegebenen Winkel selbst oder seinen Ergänzungswinkel zu zwei oder vier Rechten enthält. Ist der Winkel α, wie in Figur 1, spitz, so enthält das rechtwinklige Dreieck den Winkel selbst; ist er stumpf, wie in Figur 2, seinen Supplementwinkel $180^0 - \alpha''$; ist er überstumpf, wie in Figur 3, seinen Supplementwinkel $\alpha''' - 180^0$, und ist er untervoll, wie in Figur 4, seinen Ergänzungswinkel zu vier Rechten oder $360^0 - \alpha''''$. —

§. 12.

Ist der gegebene Winkel 0^0. 90^0, 180^0, 270^0, 360^0, kurz einer bestimmten Anzahl von rechten Winkeln gleich, so ist das rechtwinklige Dreieck dennoch vorhanden, nur ist in diesem Falle seine eine Kathete = 0 und die andere dem beweglichen Schenkel oder Radius gleich geworden.

§. 13.

Vergleicht man in diesen rechtwinkligen Dreiecken die Perpendikel und die Abschnitte auf dem unbeweglichen Schenkel ihrer Richtung nach mit einander, wobei man ganz natürlich ihre Richtungen bei spitzen Winkeln als die ursprünglichen, positiven, ansieht, so ist das Perpendikel BC bei Winkeln im ersten und zweiten Quadranten positiv, bei Winkeln im dritten und vierten Quadranten dagegen negativ. Die Abschnitte AC dagegen sind bei Winkeln im ersten und vierten Quadranten positiv und bei Winkeln im zweiten und dritten Quadranten negativ.

§. 14.

Durch einen Winkel ist demnach zugleich auch jedesmal ein rechtwinkliges Dreieck seiner Lage und Gestalt nach bestimmt, da alle anderen auf dieselbe Weise gebildeten rechtwinkligen Dreiecke dieselbe Lage haben und einander ähnlich sein müssen, da sie einen gleichen Winkel haben.

§. 15.

In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist aber durch einen Winkel nicht nur der andere schiefe Winkel bestimmt, sondern auch das Größenverhältniß unter den Dreiecksseiten, da alle rechtwinkligen Dreiecke mit einem gleichen schiefen Winkel einander ähnlich sind und dieselben Seitenverhältnisse haben.

§. 16.

Weil nun jedesmal die Seitenverhältnisse dieses rechtwinkligen Dreiecks durch einen Winkel ihrer Größe und Lage nach bestimmt und von ihm abhängig sind, so nennt man sie Functionen des Winkels, weil in der Mathematik überhaupt abhängige Größen mit dem Namen Funktionen belegt werden. Weil diese Seitenverhältnisse zugleich aber auch zur Bestimmung der Seiten und Winkel eines Dreiecks überhaupt dienen, so heißen sie auch goniometrische und trigonometrische Functionen des Winkels.

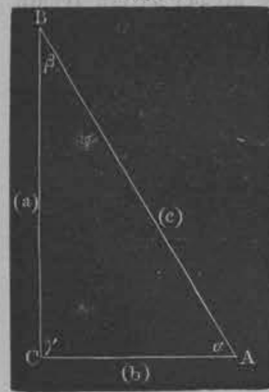
§. 17.

Umgekehrt ist durch das Verhältniß zweier beliebigen Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks nicht allein jeder schiefe Winkel und seine Ergänzungen zu einer beliebigen Anzahl von Rechten bestimmt, sondern auch die übrigen Seitenverhältnisse desselben, weil alle rechtwinkligen Dreiecke mit demselben Seitenverhältnisse einander ähnlich sind.

§. 18.

Denkt man sich demnach die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit einerlei Maß gemessen und ihre Maßzahlen mit a, b und c, sowie ihre Gegenwinkel mit α, β, γ bezeichnet, wo a und b die beiden Katheten und c die Hypotenuse sein möge, so finden unter den Maßzahlen der Seiten in Bezug auf einen schiefen Winkel z. B. den Winkel α folgende 6 Verhältnisse oder Functionen oder Quotienten statt:

Fig. 4.



1. der Quotient aus der Gegenkathete, dividirt durch die Hypotenuse, ist der Sinus des Winkels oder $\frac{a}{c} = sin\,\alpha$,

2. der Quotient aus der anliegenden Kathete, dividirt durch die Hypotenuse, ist der Cosinus des Winkels oder $\frac{b}{c} = cos\,\alpha$,

3. der Quotient aus der Gegenkathete, dividirt durch die anliegende Kathete, ist die Tangente des Winkels oder $\frac{a}{b} = tang\,\alpha$,

4. der Quotient der anliegenden Kathete, dividirt durch die Gegenkathete, ist die Cotangente des Winkels oder $\frac{b}{a} = cotg\,\alpha$,

5. der Quotient aus der Hypotenuse, dividirt durch die anliegende Kathete, ist die Secante des Winkels oder $\frac{c}{b} = sec\,\alpha$,

6. der Quotient aus der Hypotenuse, dividirt durch die Gegenkathete, ist die Cosecante des Winkels oder $\frac{c}{a} = cosec\,\alpha$.

§. 19.

Aus der Erklärung der Functionen folgt unmittelbar:

1. daß sämmtliche Functionen unbenannte Zahlen und keine Linien sind, daß demnach die trigonometrischen Tangenten und Secanten nicht mit den geometrischen Tangenten und Secanten verwechselt werden dürfen.

Beispiel: Sind die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, so ist $sin\,\alpha = 3/5$, $cos\,\alpha = 4/5$, $tg\,\alpha = 3/4$, $ctg\,\alpha = 4/3$, $sec\,\alpha = 5/4$ und $cosec\,\alpha = 5/3$.

2. daß die sämmtlichen Funktionen nur in wenigen Fällen rationale Zahlen sind, da nur in den sogenannten pythagoräischen Dreiecken die Seitenverhältnisse rational sind,

3. daß die Sinus und Cosinus ächte Brüche sind und umgekehrt ächte Brüche als Sinus oder Cosinus irgend eines Winkels gedacht werden können,

4. daß Secanten und Cosecanten ganze Zahlen und unächte Brüche sind und umgekehrt ganze Zahlen und unächte Brüche als Secanten und Cosecanten eines Winkels gedacht werden können,

5. daß Tangenten und Cotangenten alle Zahlen ausdrücken und daß umgekehrt jede beliebige Zahl als Tangente oder Cotangente eines Winkels gedacht werden kann,

6. Wenn $\alpha = 0^0$ oder $\alpha = 90^0$ ist,

daß $\sin\alpha = \frac{0}{c} = 0$ und $\sin 90^0 = \frac{c}{c} = 1$ ist.

„ $\cos\alpha = \frac{c}{c} = 1$ „ $\cos 90^0 = \frac{0}{c} = 0$ „

„ $\tan\alpha = \frac{0}{b} = 0$ „ $tg\, 90^0 = \frac{a}{0} = \infty$,

„ $cotg\,\alpha = \frac{b}{0} = \infty$ „ $ctg\, 90^0 = \frac{0}{a} = 0$ „

„ $\sec\alpha = \frac{c}{c} = 1$ „ $\sec 90^0 = \frac{c}{0} = \infty$ „

„ $cosec\,\alpha = \frac{c}{0} = \infty$ „ $cosec\, 90^0 = \frac{c}{c} = 1$ „

7. daß die Sinus und Cosinus 0 und 1

„ „ Secanten und Cosecanten 1 und ∞

„ „ Tangenten und Cotangenten 0 und ∞

zur Grenze haben,

8. daß die Hauptfunctionen (Sinus, Tangente, Secante) mit wachsenden Winkeln zunehmen, während die Cofunctionen mit wachsenden Winkeln abnehmen,

9. daß die Sinus, Cosinus und Tangenten die umgekehrten Werthe resp. der Cosecanten, Secanten und Cotangenten sind, oder

daß $\sin\alpha = \frac{1}{cosec\,\alpha}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$; $tg\,\alpha = \frac{1}{cotg\,\alpha}$ u. s. w. ist,

oder daß $\sin\alpha \,.\, cosec\,\alpha = 1$; $\cos\alpha \,.\, \sec\alpha = 1$; $tg\,\alpha \,.\, ctg\,\alpha = 1$ ist,

10. daß $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$ und umgekehrt $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\,\alpha$ ist, wie sich durch einfache Division der Functionen ergiebt,

11. daß $a = c \,.\, \sin\alpha = b\, tg\,\alpha$

$b = c \,.\, \cos\alpha = a\, ctg\,\alpha$

$c = b \,.\, \sec\alpha = a\, cosec\,\alpha$ ist,

und daß man nur in dem Falle, daß der Factor bei der Function = 1 ist, die Linien selbst als Repräsentanten ihrer Maßzahlen und als Functionen des Winkels ansehen und sie wohl lineare Functionen nennen kann,

$a = \sin\alpha = tg\,\alpha$

$b = \cos\alpha = ctg\,\alpha$

$c = \sec\alpha = cosec\,\alpha$,

12. daß $tg\, 45^0 = ctg\, 45^0 = 1$ ist, da in dem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck ABC, $a = b$ und also $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$ ist,

13. daß $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ ist.

Denn hat man ein rechtwinkliges Dreieck ABC, in dem $\alpha = 30^0$ und also $\beta = 60^0$, so ist $a = \frac{1}{2}c$ nach den Lehren der Geometrie und daher $\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}c}{c} = \frac{1}{2}$.

§. 20.

Aus der Natur des rechtwinkligen Dreiecks folgt ferner, daß durch eine Function alle übrigen mitgegeben und bestimmt sind, da durch ein Seitenverhältniß die übrigen Seitenverhältnisse bestimmt sind. Die bestimmte Form der Abhängigkeit unter den Functionen eines Winkels ist in folgenden drei identischen Gleichungen ausgeprägt, die alle drei mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes gefunden werden.

1. $\underline{\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1.}$

Da $\sin\alpha^2 = \frac{a^2}{c^2}$

und $\cos\alpha^2 = \frac{b^2}{c^2}$

so ist $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$

2. $\underline{\sec\alpha^2 - tg\,\alpha^2 = 1.}$

Denn da $\sec\alpha^2 = \frac{c^2}{b^2}$

und $tg\,\alpha^2 = \frac{a^2}{b^2}$

so ist $\sec\alpha^2 - tg\,\alpha^2 = \frac{c^2 - a^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1.$

3. $\underline{cosec\, \alpha^2 - ctg\, \alpha^2 = 1.}$

Denn da $cosec\, \alpha^2 = \frac{c^2}{a^2}$

und $ctg\, \alpha^2 = \frac{b^2}{a^2}$

so ist $cosec\, \alpha^2 - ctg\, \alpha^2 = \frac{c^2 - b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$

§. 21.

Die Gleichungen des vorigen Paragraphen zeigen, wie man den Cosinus aus dem Sinus, die Secante aus der Tangente, die Cosecante aus der Cotangente und umgekehrt finden kann, und daß namentlich:

$$sin\, \alpha = \sqrt{1 - cos\, \alpha^2} \text{ und } cos\, \alpha = \sqrt{1 - sin\, \alpha^2}$$
$$sec\, \alpha = \sqrt{1 + tg\, \alpha^2} \text{ und } tg\, \alpha = \sqrt{sec\, \alpha^2 - 1}$$
$$cosec\, \alpha = \sqrt{1 + ctg\, \alpha^2} \text{ und } ctg\, \alpha = \sqrt{cosec\, \alpha^2 - 1} \text{ ist.}$$

§. 22.

Die drei Gleichungen des §. 20 und die Gleichungen in Nr. 9 und 10 des §. 19 sind ausreichend, um mit ihrer Hilfe aus einer Function eines Winkels alle übrigen berechnen zu können.

Z. B. Ist $sin\, \alpha = m$, so ist nach §. 21 $cos\, \alpha = \sqrt{1 - m^2}$, $tg\, \alpha = \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$ (§. 19, 10); $ctg\, \alpha = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m}$ (§. 19, 9);

$sec\, \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}$ (§. 19, 9) und $cosec\, \alpha = \frac{1}{m}$ (§. 19, 9).

Auf ähnliche Weise kann man aus jeder andern Function die übrigen finden. Führt man dies bei sämmtlichen Functionen der Reihe nach aus, so erhält man folgende Tabelle für die Abhängigkeiten der sämmtlichen Functionen von einer gegebenen.

Gegeben ist	Gesucht wird: $sin\, \alpha$	$cos\, \alpha$	$tg\, \alpha$	$ctg\, \alpha$	$sec\, \alpha$	$cosec\, \alpha$
$sin\, \alpha$		$\sqrt{1 - sin\, \alpha^2}$	$\frac{sin\, \alpha}{\sqrt{1 - sin\, \alpha^2}}$	$\frac{\sqrt{1 - sin\, \alpha^2}}{sin\, \alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - sin\, \alpha^2}}$	$\frac{1}{sin\, \alpha}$
$cos\, \alpha$	$\sqrt{1 - cos\, \alpha^2}$		$\frac{\sqrt{1 - cos\, \alpha^2}}{cos\, \alpha}$	$\frac{cos\, \alpha}{\sqrt{1 - cos\, \alpha^2}}$	$\frac{1}{cos\, \alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - cos\, \alpha^2}}$
$tg\, \alpha$	$\frac{tg\, \alpha}{\sqrt{1 + tg\, \alpha^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + tg\, \alpha^2}}$		$\frac{1}{tg\, \alpha}$	$\sqrt{1 + tg\, \alpha^2}$	$\frac{\sqrt{1 + tg\, \alpha^2}}{tg\, \alpha}$
$ctg\, \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1 + ctg\, \alpha^2}}$	$\frac{ctg\, \alpha}{\sqrt{1 + ctg\, \alpha^2}}$	$\frac{1}{ctg\, \alpha}$		$\frac{\sqrt{1 + ctg\, \alpha^2}}{ctg\, \alpha}$	$\sqrt{1 + ctg\, \alpha^2}$
$sec\, \alpha$	$\frac{\sqrt{sec\, \alpha^2 - 1}}{sec\, \alpha}$	$\frac{1}{sec\, \alpha}$	$\sqrt{sec\, \alpha^2 - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{sec\, \alpha^2 - 1}}$		$\frac{sec\, \alpha}{\sqrt{sec\, \alpha^2 - 1}}$
$cosec\, \alpha$	$\frac{1}{cosec\, \alpha}$	$\frac{\sqrt{cosec\, \alpha^2 - 1}}{cosec\, \alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{cosec\, \alpha^2 - 1}}$	$\sqrt{cosec\, \alpha^2 - 1}$	$\frac{cosec\, \alpha}{\sqrt{cosec\, \alpha^2 - 1}}$	

§. 23.

Uebungsaufgaben zu den letzten Paragraphen.

Die Functionen sind als gemeine Brüche aufzuführen und dann in Decimalbrüche auf vier oder fünf Stellen zu verwandeln.

1. Wie heißen die Functionen des Winkels α, wenn in dem rechtwinkligen Dreieck ABC:

$$a = 5,\ b = 12,\ c = 13 \text{ oder}$$
$$a = 8,\ b = 15,\ c = 17 \text{ ist?}$$

2. Wenn $\sin\alpha = {}^{24}/_{25}$ oder $tg\,\alpha = {}^{1}/_{7}$ oder $\sec\alpha = \sqrt{2}$ oder $cosec\,\alpha = 3{,}5$ ist, wie groß sind die übrigen Functionen dieser Winkel?

3. Einen spitzen Winkel zu zeichnen, dessen Tangente $= {}^{3}/_{4}$ oder dessen Sinus $= {}^{5}/_{7}$ oder dessen Secante $= {}^{9}/_{5}$ ist.

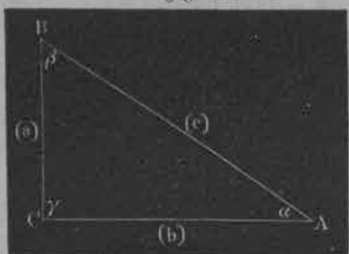
4. Wie heißen sämmtliche Functionen von 30^0 und von 45^0?

§. 24.

Functionen spitzer Complementwinkel.

Wenn zwei spitze Winkel α und β Complementwinkel sind, wie 30^0 und 60^0, so können sie jedesmal als schiefe Winkel eines und desselben rechtwinkligen Dreiecks ABC gedacht werden. Da nun nach der Erklärung der Functionen in §. 18,

Fig. 5.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \text{ und } \sin\beta = \frac{b}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \text{ „ } \cos\beta = \frac{a}{c}$$
$$tg\,\alpha = \frac{a}{b} \text{ „ } tg\,\beta = \frac{b}{a}$$
$$ctg\,\alpha = \frac{b}{a} \text{ „ } ctg\,\beta = \frac{a}{b}$$
$$\sec\alpha = \frac{c}{b} \text{ „ } \sec\beta = \frac{c}{a}$$
$$cosec\,\alpha = \frac{c}{a} \text{ „ } cosec\,\beta = \frac{c}{b} \text{ ist,}$$

so ergibt sich hieraus, daß Complementwinkel gleiche verwandte Functionen haben, wenn man verwandte Functionen diejenigen nennt, die sich nur durch die Vorsylbe *co* unterscheiden.

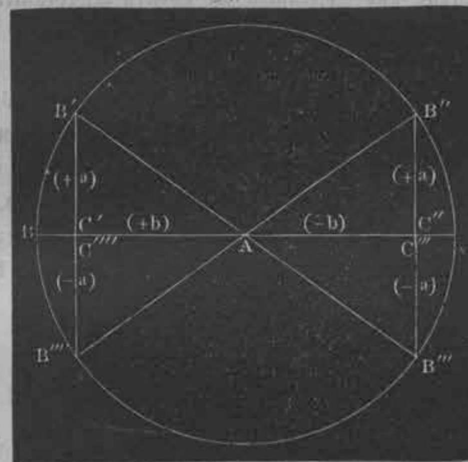
Ist $\sin 30^0 = {}^{1}/_{2}$, so ist $\cos 60^0$ ebenfalls $= {}^{1}/_{2}$;
ist $tg\,45^0 = 1$, so ist auch $ctg\,45^0 = 1$. —

§. 25.

Functionen von Supplement-Winkeln.

Sind $C'AB''$, $C'AB'''$, $C'AB''''$ Supplementwinkel zu $C'AB'$ und hat AB während der ganzen Drehung zur Erzeugung der Winkel dieselbe

Fig. 6.



Länge behalten, was zur einfachen Vergleichung der Functionen nothwendig ist, so sind die Dreiecke $AB'C'$, $AB''C''$, $AB'''C'''$, $AB''''C''''$ congruent (da Hypotenuse und ein schiefer Winkel in ihnen gleich ist), und daher auch die Perpendikel (BC) und Abschnitte (AC) gleich. Berücksichtigt man nun bei ihnen auch noch ihre Richtung im Verhältniß zur Richtung beim spitzen Winkel $C'AB'$ und bezeichnet die Winkel im ersten, zweiten, dritten und vierten Quadranten kurz mit α', α'', α''', α'''', so ist

	für α'	α''	α'''	α''''
$\sin =$	$+\frac{a}{c}$	$+\frac{a}{c}$	$-\frac{a}{c}$	$-\frac{a}{c}$
$\cos =$	$+\frac{b}{c}$	$-\frac{b}{c}$	$-\frac{b}{c}$	$+\frac{b}{c}$
$tg =$	$+\frac{a}{b}$	$-\frac{a}{b}$	$+\frac{a}{b}$	$-\frac{a}{b}$
$ctg =$	$+\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$+\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$
$\sec =$	$+\frac{c}{b}$	$-\frac{c}{b}$	$-\frac{c}{b}$	$+\frac{c}{b}$
$cosec =$	$+\frac{c}{a}$	$+\frac{c}{a}$	$-\frac{c}{a}$	$-\frac{c}{a}$

Hieraus folgt:

1. daß Supplementwinkel gleiche absolute Functionen haben,

2. daß die Functionen der Winkel im ersten Quadranten sämmtlich positiv, und daß in jedem andern Quadranten eine Function mit ihrem umgekehrten Werthe positiv, alle übrigen aber negativ sind,

3. daß die Sinus und Cosecanten im zweiten Quadranten die Tangenten und Cotangenten im dritten und die Cosinus und Secanten im vierten positiv sind,

4. daß durch die absolute Größe der Function der Winkel noch vierdeutig bestimmt ist, d. h. vier verschiedene Werthe haben kann,

5. daß durch eine Function mit Vorzeichen der Winkel noch zweideutig bestimmt ist, d. h. noch zwei verschiedene Werthe haben kann,

6. daß ein Winkel erst vollkommen durch zwei mit Vorzeichen versehene Functionen, die jedoch nicht umgekehrte Werthe sein dürfen, bestimmt ist.

§. 26.

Functionen der Winkel, welche größer als vier Rechte sind.

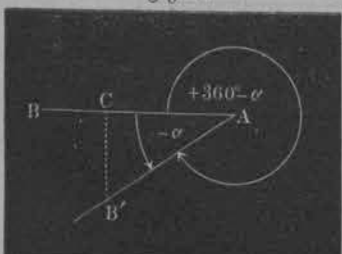
Sind für einen Winkel $4R + \alpha$ oder allgemein $4nR + \alpha$ die Functionen zu bestimmen und ist α kleiner als $4R$, so ergiebt sich ganz einfach aus Betrachtung von Figur 1 und aus der Erklärung der Functionen, daß α und $4R + \alpha$ oder $4nR + \alpha$ ganz dieselben, mit denselben Vorzeichen versehenen Functionen haben.

§. 27.

Functionen negativer Winkel.

Da negative Winkel durch Drehung nach entgegengesetzter Seite hin erzeugt werden, so ergiebt sich unmittelbar aus Betrachtung beistehender

Fig. 7.



Figur oder aus Figur 1, 1. daß die negativen Winkel ganz dieselben Functionen haben, wie die positiven Winkel, welche sie zur $4R$ ergänzen oder in Zeichen funct. trig. $(-\alpha)$ = funct. trig. $(360^0 - \alpha)$, und 2.

daß $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$

$ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$

u. s. w. ist.

§. 28.

Aus den früheren Paragraphen über die Functionen von Complement-, Supplement-, übervollen und negativen Winkeln folgt:

1. daß die Functionen der spitzen Winkel, ihrer absoluten Größe nach, zugleich auch die Functionen aller übrigen denkbaren Winkel sind, und daß ihr Vorzeichen sich einfach durch die Größe des Winkels bestimmt,

2. daß durch die Functionen von $0^0 - 45^0$ auch die Functionen von $45^0 - 90^0$ mitgegeben sind, da $45^0 - \alpha$ und $45^0 + \alpha$ gleiche verwandte Functionen haben,

3. daß daher nur die Functionen von Winkeln von $0^0 - 45^0$ berechnet zu werden brauchen,

4. daß die Sätze des §. 20 für alle Winkel Gültigkeit haben.

§. 29.

Uebungsaufgaben über die frühern Paragraphen.

1. Wenn $\cos\alpha = -\,^4/_5$, welchen Quadranten kann α angehören?
2. Wenn $tg\,\alpha = -\,^5/_4$, " " " " "
3. Wenn $\sec\alpha = +2$, " " " " "
4. Welche Vorzeichen haben die Functionen folgender Winkel: $\sin 120^0$, $\cos 170^0$, $tg\,145^0$, $ctg\,245^0$, $\sec 139^0$, $cosec\,315^0$, $\sin 325^0$?
5. Welchem Quadranten gehören die Winkel α, β, γ an,

   wenn $\sin\alpha = m$ und $\cos\alpha = -n$ ist,

   " $\cos\beta = r$ und $tg\,\beta = -s$ ist,

   " $\sec\gamma = o$ und $\sin\gamma = -q$ ist?

§. 30.

Uebergang.

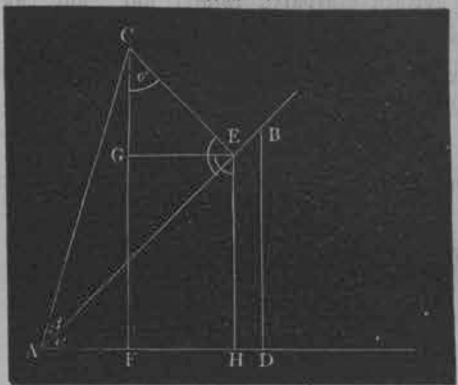
Nachdem wir gesehen haben, wie durch eine einzige Function eines Winkels alle übrigen bestimmt sind, und wie durch die Functionen der spitzen Winkel, die aller übrigen Winkel mitgegeben sind, so wollen wir nun zunächst noch die Functionen solcher Winkel zu bestimmen suchen, die als Summen oder Differenzen anderer Winkel erscheinen, deren Functionen gegeben sind, um durch sie neue Hilfsmittel für die Berechnung der Functionen namentlich spitzer Winkel zu gewinnen.

§. 31.

Aufgabe.

Aus den Sinus und Cosinus zweier Winkel den Sinus und Cosinus ihrer Summe zu finden.

Fig. 8.



Auflösung. Sind α und β die beiden Winkel, deren Sinus und Cosinus gegeben sind, α und β spitz und ihre Summe $(\alpha + \beta)$ ebenfalls spitz, so trage man die beiden Winkel an einander, gebe ihren beweglichen Schenkeln AB und AC dieselbe Länge, und nehme sie als Einheiten, stelle die gegebenen und gesuchten Functionen durch Fällung der Perpendikel BD, CE und CF dar und fälle aus E die Hilfsperpendikel $EG \perp CF$ und $EH \perp AD$,

so ist 1. $BD = \sin\alpha$; $AD = \cos\alpha$; $CE = \sin\beta$; $AE = \cos\beta$ bekannt,

2. $GF = EH$; $GE = FH$ (Parallelen zwischen Parallelen),

3. $\triangle ABD \sim \triangle AHE \sim \triangle CGE$ (zwei gleiche Winkel),

4. $CF = \sin(\alpha + \beta)$	$AF = \cos(\alpha + \beta)$
Nun ist $CF = GF + CG = EH + CG$	Nun ist $AF = AH - FH = AH - GE$.

Da nun aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD und AEH folgt, daß

$EH : EA = BD : AB = BD : 1$	$AH : AE = AD : AB = AD : 1$
so ist 1. $EH = EA . BD$.	so ist 1. $AH = AE . AD$.

Da nun ebenso aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD u. CGE folgt, daß

$CG : CE = AD : AB = AD : 1$	$GE : CE = BD : AB = BD : 1$
so ist 2. $CG = CE \ AD$.	so ist 2. $GE = CE . BD$.
Daher	Daher
$CF = EH + CG = EA . BD + CE . AD$	$AF = AH - GE = AE . AD - CE . BD$
oder	oder
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta$.	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta$.

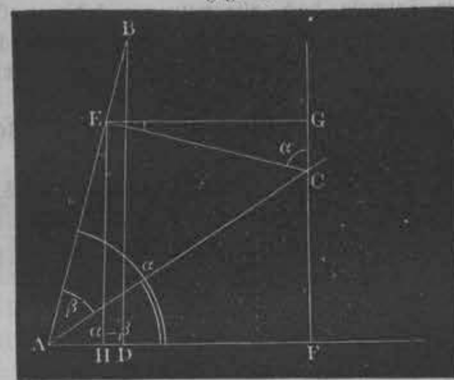
§. 32.

Aufgabe.

Aus den Sinus und Cosinus zweier Winkel den Sinus und Cosinus ihrer Differenz zu finden.

Auflösung. Sind α und β die beiden Winkel, deren Sinus und Cosinus gegeben sind, α und β spitz und ihre Differenz $(\alpha - \beta)$ ebenfalls spitz, so trage man den kleinern Winkel β in dem größern durch Zurück-

Fig. 9.



drehung des beweglichen Schenkels AC ein, gebe ihrem beweglichen Schenkel AB und AC dieselbe Länge und nehme sie als Einheit an, stelle die gegebenen und gesuchten Functionen durch Fällung der Perpendikel BD, CE und CF dar und fälle aus E die Hilfsperpendikel $EG \perp CF$ und $EH \perp AD$,

so ist 1. $BD = \sin\alpha$; $AD = \cos\alpha$; $CE = \sin\beta$; $AE = \cos\beta$ bekannt,

2. $GF = EH$; $GE = FH$ (Parallelen zwischen Parallelen),

3. $\triangle ABD \sim \triangle AHE \sim \triangle CGE$ (zwei gleiche Winkel),

4. $CF = \sin(\alpha - \beta)$.	$AF = \cos(\alpha - \beta)$ gesucht.
Nun ist $CF = GF - CG = EH - CG$.	Nun ist $AF = AH + FH = AH + EG$.

Da nun aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD und AEH folgt, daß

$EH : EA = BD : AB = BD : 1$,	$AH : AE = AD : AB = AD : 1$,
so ist 1. $EH = EA . BD$.	so ist 1. $AH = AE . AD$.

Da nun aber ebenso aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD u. CGE folgt, daß

$CG : CE = AD : AB = AD : 1$,	$GE : CE = BD : AB = BD : 1$,
so ist 2. $CG = CE . AD$.	so ist 2. $GE = CE . BD$.
Daher	Daher
$CF = EH - CG = EA . BD - CE . AD$	$AF = AH + GE = AE . AD + CE . BD$
oder	oder
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta$.	$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta$.

Bemerkung. 1. Die Ableitung der vier Formeln ist für alle vier Aufgaben, wie man sieht, ganz gleich und dadurch sehr vereinfacht, daß wir in beiden Figuren gleichliegende Punkte mit denselben Buchstaben bezeichnet und den beweglichen Schenkel = 1 gesetzt haben, weil dadurch aus allen trigonometrischen Functionen der Divisor AB weggefallen ist. 2. Obgleich unsere Ableitung sich in beiden Paragraphen auf die Voraussetzung stützt, daß nicht nur beide Winkel einzeln, sondern auch ihre Summe kleiner als R ist, so haben die Formeln doch allgemeine, unbedingte Gültigkeit. Den Nachweis ihrer allgemeinen Gültigkeit zu führen, gehört nicht hierher; doch wird es eine gute Uebung sein, sich an den Ableitungen für die beiden Voraussetzungen zu üben,

a. daß beide Winkel spitz, aber ihre Summe ein stumpfer Winkel ist,

b. daß ein Winkel spitz und einer stumpf ist,

weil sie auf ähnliche Weise durchzuführen sind und Uebung und Sicherheit im Gebrauch der Vorzeichen bei den Functionen gewähren.

§. 33.

Folgerungen.

Aus den beiden vorigen Paragraphen ergeben sich demnach folgende vier allgemein gültige Formeln:

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta$,
2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta - \cos\alpha \,.\, \sin\beta$,
3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta$,
4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\alpha \,.\, \sin\beta$,

oder in Worten:

1. Der Sinus der Summe oder Differenz zweier Winkel ist der Summe oder Differenz der Producte ihrer ungleichnamigen Functionen gleich.

2. Der Cosinus der Summe oder Differenz zweier Winkel ist der Differenz oder Summe der Producte ihrer gleichnamigen Functionen gleich, wenn man das Product ihrer Cosinus-Functionen zum Minuend und das der Sinus-Functionen zum Subtrahend macht.

Bemerkung. Da diese vier Formeln die Grundformeln für die analytische Trigonometrie sind, mit deren Hilfe fast sämmtliche anderen Formeln abgeleitet werden, so muß auf richtige Auffassung und Verwendung aller Fleiß verwandt werden.

Uebungsaufgaben.

1. Wenn $\sin\alpha = {}^1/_2$, $\cos\alpha = {}^1/_2\sqrt{3}$ und $\sin\beta = 1$ und $\cos\beta = 0$, Wie groß ist $\sin(\alpha\pm\beta)$ und $\cos(\alpha\pm\beta)$?

2. Wenn $\sin\alpha = {}^3/_5$, $\cos\alpha = {}^4/_5$, $\sin\beta = {}^5/_{13}$, $\cos\beta = {}^{12}/_{13}$ Wie groß ist $\sin(\alpha\pm\beta)$ und $\cos(\alpha\pm\beta)$?

3. Wenn $\sin 18^0 = 0{,}309$ u. $\cos 18^0 = 0{,}951$, $\sin 15^0 = 0{,}2588$ u. $\cos 15^0 = 0{,}9659$ Wie groß ist $\sin(18^0\pm 15^0)$ und $\cos(18^0\pm 15^0)$?

4. Wenn $\sin 41^0 = 0{,}6560$ u. $\cos 41^0 = 0{,}7547$ und $\sin 29^0 = 0{,}4848$ u. $\cos 29^0 = 0{,}8746$ Wie groß ist $\sin(41^0\pm 29^0)$ und $\cos(41^0\pm 29^0)$?

§. 34.

Aus der Tangente zweier Winkel die Tangente ihrer Summe und Differenz zu finden.

Da nach §. 19, 10. $tg(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$, so ist nach §. 31

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta}.$$

Dividirt man nun, um die Sinus und Cosinus zu eliminiren und statt ihrer die Tangenten der gegebenen Winkel zu erhalten, mit $\cos\alpha \,.\, \cos\beta$, Zähler und Nenner des Bruches, so erhält man unmittelbar

$$1.\ tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \,.\, tg\beta}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man:

$$2.\ tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \,.\, tg\beta}.$$

§. 35.

Aus der Cotangente zweier Winkel die Cotangente ihrer Summe und Differenz zu finden.

Da nach §. 19, 10. $ctg(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$, so ist nach §. 31

$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{\cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta}{\sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta}.$$

Dividirt man nun, um die Sinus und Cosinus zu eliminiren und statt ihrer die Cotangenten der gegebenen Winkel zu erhalten, mit $\sin\alpha . \sin\beta$, Zähler und Nenner des Bruchs, so erhält man ebenso unmittelbar, wie im vorigen Paragraphen:

$$1.\ ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\,\alpha . ctg\,\beta - 1}{ctg\,\beta + ctg\,\alpha}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man:

$$2.\ ctg(\alpha-\beta) = \frac{ctg\,\alpha . ctg\,\beta + 1}{ctg\,\beta - ctg\,\alpha}.$$

Beispiele: Wenn $tg\,\alpha = {}^3/_4$ und $tg\,\beta = {}^5/_{12}$, wie groß ist $tg(\alpha \pm \beta)$? Wenn $tg\,29^0 = 0{,}5543$ und $tg\,28^0 = 0{,}5317$, wie groß ist $tg(29^0 \pm 28^0)$? Wenn $ctg\,17^0\,28^1 = 3{,}178$ und $ctg\,13^0\,2^1 = 4{,}320$, wie groß ist $ctg(17^0\,28^1 \pm 13^0\,2^1)$?

§. 36.
Specialisirung der in den vorigen Paragraphen gewonnenen Formeln.

Da die Formeln der drei letzten Paragraphen in einzelnen speciellen Fällen eine kürzere Form annehmen und besonders häufig gebraucht werden, so wollen wir uns zunächst mit diesen speciellen Fällen beschäftigen.

1. Setzt man in $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta$ $\beta = \alpha$, so ist $\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha . \cos\alpha + \cos\alpha . \sin\alpha$ oder

$$1)\ \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

2. Setzt man in dieser Formel $2\alpha = \alpha'$ und $\alpha = {}^1/_2\,\alpha'$, so erhält man

$$2)\ \sin\alpha' = 2 \sin {}^1/_2\,\alpha' \cos {}^1/_2\,\alpha'.$$

Beide Formeln dienen dazu, um aus dem Sinus und Cosinus eines Winkels den Sinus des doppelten Winkels zu finden.

Beispiel: Wie groß ist $\sin 38^0$, wenn $\sin 19^0 = 0{,}3256$ und $\cos 19^0 = 0{,}9455$ ist?

3. Setzt man in $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta$, $\beta = \alpha$, so ist $\cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha . \cos\alpha - \sin\alpha . \sin\alpha$ oder

$$3)\ \cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha).$$

4. Eliminirt man aus der Formel für $\cos 2\alpha$ entweder $\cos\alpha^2$ oder $\sin\alpha^2$, indem man für $\cos\alpha^2 = 1 - \sin\alpha^2$ und für $\sin\alpha^2 = 1 - \cos\alpha^2$ setzt, so erhält man

$$4)\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin\alpha^2 \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin {}^1/_2\,\alpha^2 \text{ oder}$$

$$5)\ \cos 2\alpha = 2\cos\alpha^2 - 1 \quad \cos\alpha = 2\cos {}^1/_2\,\alpha^2 - 1.$$

Beide Formeln zeigen, wie der Cosinus eines doppelten Winkels aus dem Sinus oder Cosinus des einfachen Winkels allein gefunden werden kann.

Wie groß ist $\cos 26^0$, wenn $\sin 13^0 = 0{,}225$ ist?

„ „ „ $\cos 24^0$, „ $\cos 12^0 = 0{,}978$ ist?

5. Löset man die beiden in Nr. 4 erhaltenen Formeln für $\sin\alpha^2$ und $\cos\alpha^2$ oder für $\sin {}^1/_2\,\alpha^2$ und $\cos {}^1/_2\,\alpha^2$ auf, so erhält man

$$6)\ \sin\alpha^2 = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};\quad \sin {}^1/_2\,\alpha^2 = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

$$7)\ \cos\alpha^2 = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};\quad \cos {}^1/_2\,\alpha^2 = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

6. Aus den Formeln in Nr. 5 erhält man für $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin {}^1/_2\,\alpha$ und $\cos {}^1/_2\,\alpha$:

$$8)\ \sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}};\quad \sin {}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$9)\ \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}};\quad \cos {}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Beide Formeln zeigen, wie man aus dem Cosinus eines doppelten Winkels den Sinus und Cosinus des einfachen finden kann.

Wenn $\cos 39^0 = 0{,}777146$ ist, wie groß ist $\sin 19^0\,30'$ und $\cos 19^0\,30'$?

7. Setzt man in $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta$
und $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta$
$\alpha = 30^0$ und $\sin\alpha = \sin 30^0 = {}^1/_2$, so erhält man, wenn man beide Formeln addirt: $\sin(30+\beta) + \sin(30-\beta) = \cos\beta$ oder für $\sin(30+\beta)$ aufgelöst.

$$10)\ \sin(30+\beta) = \cos\beta - \sin(30-\beta).$$

Diese Formel zeigt, daß man die Sinus von Winkeln zwischen 30^0 und 60^0 allein durch Subtraction finden kann.

Beispiel: Wie groß ist der Sinus von 50^0, wenn $\cos 20^0 = 0{,}9397$ und $\sin 10^0 = 0{,}1736$ ist?

8. Setzt man in den vier Formeln in §. 33 den Winkel $\alpha = 45^0$ und berücksichtigt, daß $\sin 45^0 = \cos 45^0 = {}^1/_2 \sqrt{2}$ ist, so erhält man

$$\sin(45^0+\beta) = (\cos\beta + \sin\beta)\ {}^1/_2 \sqrt{2}$$
$$\sin(45^0-\beta) = (\cos\beta - \sin\beta)\ {}^1/_2 \sqrt{2}$$
$$\cos(45^0+\beta) = (\cos\beta - \sin\beta)\ {}^1/_2 \sqrt{2}$$
$$\cos(45^0-\beta) = (\cos\beta + \sin\beta)\ {}^1/_2 \sqrt{2}$$

welche man gewöhnlich für die Functionen der rechten Seite in folgender Gestalt aufgelöst findet:

$$11)\quad \cos\beta + \sin\beta = \sin(45^0 + \beta)\sqrt{2},$$

$$12)\quad \cos\beta - \sin\beta = \sin(45^0 - \beta)\sqrt{2},$$

$$13)\quad \cos\beta - \sin\beta = \cos(45^0 + \beta)\sqrt{2},$$

$$14)\quad \cos\beta + \sin\beta = \cos(45^0 - \beta)\sqrt{2}.$$

9. Setzt man in $tg\,(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}$ $\beta = \alpha$,

so ist $tg\,(\alpha + \alpha) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha\,.\,tg\,\alpha}$

oder 15) $tg\,2\,\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha^2}$.

Ebenso erhält man:

$$16)\quad ctg\,2\,\alpha = \frac{ctg\,\alpha^2 - 1}{2\,ctg\,\alpha}.$$

10. Setzt man in $tg\,(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}$

und $ctg\,(\alpha \pm \beta) = \dfrac{ctg\,\alpha\,.\,ctg\,\beta \mp 1}{ctg\,\beta \pm ctg\,\alpha}$, $\alpha = 45^0$

und berücksichtigt, daß $tg\,45^0 = ctg\,45^0 = 1$ ist, so erhält man:

$$17)\quad tg\,(45^0 \pm \beta) = \frac{1 \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\beta},$$

$$18)\quad ctg\,(45^0 \pm \beta) = \frac{ctg\,\beta \mp 1}{ctg\,\beta \pm 1}.$$

Zwei Formeln, welche häufig bei Dreiecksaufgaben in Anwendung kommen und für den unlogarithmischen Ausdruck der rechten Seite den viel bequemern Rechenausdruck der linken Seite liefern.

§. 37.

Neue Formeln, welche durch Combination aus den Formeln in §. 33 — 36 abgeleitet sind.

Durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division besonders der in §. 33 enthaltenen Formeln, erhält man eine Menge von neuen wichtigen Formeln, die besonders dazu dienen, Summen und Differenzen in Producte und Quotienten zu verwandeln oder anstatt unlogarithmischer Ausdrücke logarithmische zu gewinnen.

1. Addirt und subtrahirt man Formel 1 und 2 und ebenso 3 und 4 in §. 33, so erhält man folgende vier Formeln:

$$1)\quad \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\,.\,\cos\beta,$$

$$2)\quad \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\,.\,\sin\beta,$$

$$3)\quad \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\,.\,\cos\beta,$$

$$4)\quad \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\,.\,\sin\beta.$$

2. Setzt man in diesen Formeln $\alpha + \beta = a$ und $\alpha - \beta = b$, so ist nach den Lehren der Arithmetik $\alpha = \dfrac{a+b}{2}$ und $\beta = \dfrac{a-b}{2}$.

Die vier Formeln gehen demnach in folgende vier Formeln über:

$$5)\quad \sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$6)\quad \sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$7)\quad \cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$8)\quad \cos b - \cos a = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

welche zeigen, wie Summen und Differenzen zweier Sinus oder Cosinus in Producte aus den Sinus und Cosinus ihrer halben Summe und halben Differenz verwandelt, also logarithmisch gemacht werden können.

3. Dividirt man wieder die in Nr. 2 gewonnenen Formeln durch einander, so erhält man aus ihnen sechs neue Formeln, unter denen besonders folgende drei häufig angewandt werden:

$$9)\quad \frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = tg\,{}^1/_2\,(a + b)$$

$$10)\quad \frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = tg\,{}^1/_2\,(a - b)$$

$$11)\quad \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = tg\,{}^1/_2(a+b)\,.\,ctg\,{}^1/_2(a-b) = \frac{tg\,{}^1/_2(a+b)}{tg\,{}^1/_2(a-b)}$$

Die letztere Formel kommt namentlich häufig bei Dreiecksaufgaben vor, in denen Summen und Differenzen von Seiten oder Winkeln gegeben sind.

4. Multiplicirt man $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\,.\,\cos\beta + \cos\alpha\,.\,\sin\beta$

mit $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\,.\,\cos\beta - \cos\alpha\,.\,\sin\beta$

so erhält man $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha^2\cos\beta^2 - \cos\alpha^2\sin\beta^2$.

Eliminirt man hieraus entweder $\cos\beta^2 = 1 - \sin\beta^2$ oder $\sin\beta^2 = 1 - \cos\beta^2$, so erhält man

$$1)\ \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha^2(1-\sin\beta^2) - \cos\alpha^2 . \sin\beta^2$$
$$= \sin\alpha^2 - \sin\alpha^2 . \sin\beta^2 - \cos\alpha^2 . \sin\beta^2$$
$$= \sin\alpha^2 - (\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2)\sin\beta^2$$
$$= \sin\alpha^2 - \sin\beta^2$$

oder 2) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \cos\beta^2 - \cos\alpha^2$.

5. Setzt man $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $tg\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ und addirt und subtrahirt beide Formeln, so erhält man:

$$tg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta}{\cos\alpha . \cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha . \cos\beta}$$

$$tg\,\alpha - tg\,\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta}{\cos\alpha . \cos\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha . \cos\beta}$$

Auf dieselbe Weise erhält man:

$$ctg\,\alpha + ctg\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha . \sin\beta}$$

$$ctg\,\beta - ctg\,\alpha = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha . \sin\beta}.$$

§. 38.

Aus diesen für zwei Winkel entwickelten Formeln kann man neue Formeln für das Aggregat von drei Winkeln ableiten, indem man $\beta+\gamma$ als einfache Größe betrachtet, für diese die Formeln entwickelt und nachher für die Functionen von $(\beta+\gamma)$ ihre Werthe substituirt. Auf diese Weise erhält man leicht:

$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha . \cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha . \sin(\beta+\gamma)$ und durch Entwicklung von $\cos(\beta+\gamma)$ und $\sin(\beta+\gamma)$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha . \cos\beta . \cos\gamma - \sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma + \cos\alpha . \sin\beta . \cos\gamma + \cos\alpha . \cos\beta . \sin\gamma.$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma - \sin\alpha . \sin\beta . \cos\gamma - \sin\alpha . \cos\beta . \sin\gamma - \cos\alpha . \sin\beta . \sin\gamma.$$

Setzt man $\alpha = \beta = \gamma$, so erhält man aus ihnen leicht nach Elimination der Cosinus oder Sinus:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos\alpha^3 - 3\cos\alpha.$$

§. 39.

Tabelle der wichtigsten in den frühern Paragraphen gefundenen Formeln.

1. $funct.\,\alpha = cof.\,(90^0 - \alpha)$.
2. $funct.\,\alpha = \pm\,funct.\,(180^0 - \alpha)$.
3. $funct.\,(-\alpha) = funct.\,(360^0 - \alpha)$.
4. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.
5. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
6. $tg\,(-\alpha) = -tg\,\alpha$.
7. $ctg\,(-\alpha) = -ctg\,\alpha$.
8. $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$.
9. $\sec\alpha^2 - tg\,\alpha^2 = 1$.
10. $cosec\,\alpha^2 - ctg\,\alpha^2 = 1$.
11. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$.
12. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\,\alpha$.
13. $\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$.
14. $\sin 60^0 = \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
15. $cosec\,30^0 = \sec 60^0 = 2$.
16. $tg\,30^0 = ctg\,60^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.
17. $tg\,60^0 = ctg\,30^0 = \sqrt{3}$.
18. $tg\,45^0 = ctg\,45^0 = 1$.
19. $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
20. $\sec 45^0 = cosec\,45^0 = \sqrt{2}$.
21. $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha . \cos\beta \pm \cos\alpha . \sin\beta$.
22. $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha . \cos\beta \mp \sin\alpha . \sin\beta$.
23. $tg\,(\alpha\pm\beta) = \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\beta}{1 \mp tg\,\alpha . tg\,\beta}$.
24. $ctg\,(\alpha\pm\beta) = \frac{ctg\,\alpha . ctg\,\beta \mp 1}{ctg\,\beta \pm ctg\,\alpha}$.
25. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha . \cos\alpha$.
26. $\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha$.
27. $= 1 - 2\sin\alpha^2$.
28. $= 2\cos\alpha^2 - 1$.
29. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

30. $\cos {}^1/_2\, \alpha = \sqrt{\dfrac{1 + \cos \alpha}{2}}.$

31. $\sin (30^0 + \beta) = \cos \beta - \sin (30^0 - \beta).$

32. $\cos \beta + \sin \beta = \sin(45^0 + \beta)\sqrt{2} = \cos(45^0 - \beta)\sqrt{2}.$

33. $\cos \beta - \sin \beta = \sin(45^0 - \beta)\sqrt{2} = \cos(45^0 + \beta)\sqrt{2}.$

34. $tg\, 2\alpha = \dfrac{2\, tg\, \alpha}{1 - tg\, \alpha^2}.$

35. $ctg\, 2\alpha = \dfrac{ctg\, \alpha^2 - 1}{2\, ctg\, \alpha}.$

36. $tg\, (45^0 \pm \beta) = \dfrac{1 \pm tg\, \beta}{1 \mp tg\, \beta}.$

37. $ctg\, (45^0 \pm \beta) = \dfrac{ctg\, \beta \mp 1}{ctg\, \beta \pm 1}.$

38. $\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \,.\, \cos \beta.$

39. $\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \,.\, \sin \beta.$

40. $\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \,.\, \cos \beta.$

41. $\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \,.\, \sin \beta.$

42. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}.$

43. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \sin \dfrac{\alpha - \beta}{2}.$

44. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}.$

45. $\cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \sin \dfrac{\alpha - \beta}{2}.$

46. $\dfrac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = tg\, \dfrac{\alpha + \beta}{2}.$

47. $\dfrac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = tg\, \dfrac{\alpha - \beta}{2}.$

48. $\dfrac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \dfrac{tg\, \dfrac{\alpha + \beta}{2}}{tg\, \dfrac{\alpha - \beta}{2}}.$

49. $\sin (\alpha + \beta) \,.\, \sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha^2 - \sin \beta^2.$

50. $\cos (\alpha + \beta) \,.\, \cos (\alpha - \beta) = \cos \beta^2 - \sin \alpha^2.$

51. $tg\, \alpha + tg\, \beta = \dfrac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \,.\, \cos \beta}.$

52. $tg\, \alpha - tg\, \beta = \dfrac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \,.\, \cos \beta}.$

53. $ctg\, \alpha + ctg\, \beta = \dfrac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \,.\, \sin \beta}.$

54. $ctg\, \beta - ctg\, \alpha = \dfrac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \,.\, \sin \beta}.$

55. $tg\, \alpha + ctg\, \alpha = 2\, cosec\, 2\alpha.$

56. $tg\, \alpha - ctg\, \alpha = -2\, ctg\, 2\alpha.$

57. $\sin (\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$

58. $\cos (\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma.$

59. $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin \alpha^3.$

60. $\cos 3\alpha = 4 \cos \alpha^3 - 3 \cos \alpha.$

61. $\sin 4\alpha = (4 \sin \alpha - 8 \sin \alpha^3) \cos \alpha.$

62. $\cos 4\alpha = 8 (\cos \alpha^4 - \cos \alpha^2) + 1.$

Uebungsaufgaben zu §. 39.

1. $tg\, 3\alpha = \dfrac{3\, tg\, \alpha - tg\, \alpha^3}{1 - 3\, tg\, \alpha^2}.$
2. $\sec 2\alpha = \dfrac{\sec \alpha^2}{1 - tg\, \alpha^2}.$
3. $\sec \alpha - \sec \beta = \dfrac{2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \sin \dfrac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \alpha \,.\, \cos \beta}$ abzuleiten.

$$\left.\begin{array}{l}
4.\ \sin x \sqrt{3} = \sqrt{3} - \cos x. \\
5.\ 2\sqrt{x^2 - x^4} = \sin \alpha. \\
6.\ \dfrac{ctg\, x - \sec x}{ctg\, x} = {}^1/_{16}. \\
7.\ a \cos x = b \,.\, ctg\, x. \\
8.\ a\ \ tg\, x = b \,.\, ctg\, x. \\
9.\ a \sin x = b \,.\, \sec x. \\
10.\ a \sin x + b \,.\, \cos x = c.
\end{array}\right\}\ x \text{ zu bestimmen.}$$

Berechnung der trigonometrischen Tafeln.

§. 40.

Die folgenden Sätze haben nicht sowohl den Zweck, mit ihrer Hilfe trigonometrische Tafeln zu berechnen, sondern nur im Allgemeinen die Möglichkeit ihrer elementaren Berechnung zu zeigen, da die Tafeln längst bis zur größten geforderten Genauigkeit berechnet sind und die Analysis außerdem viel bequemere Methoden zur Berechnung an die Hand gibt.

§. 41.

Der Sinus eines Winkels ist gleich der halben Sehne des doppelten Winkels oder $\sin\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{chord} 2\alpha$. Denn ist im Sector BAD die Sehne BD und das Perpendikel AC gezogen und ist $BAD = 2\alpha$, so ist $BAC = \alpha$ und $BC = \frac{1}{2}\operatorname{chord} 2\alpha$. Nimmt man nun $AB = 1$ an, so ist $BC = \sin\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{chord} 2\alpha$.

§. 42.

Vermittelst des Satzes, daß $\sin\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{chord} 2\alpha$, lassen sich zuerst die Sinus aller der Winkel unmittelbar berechnen, welche die Hälften derjenigen Winkel sind, die als Centriwinkel von solchen regulären Figuren erscheinen, die geometrisch construirt und berechnet werden können. Demnach können die Sinus folgender Winkel berechnet werden, und man erhält nach den Lehren der Geometrie auf diese Weise:

α) $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\operatorname{chord} 120^0 =$ der halben Seite des regulären Dreiecks $= \frac{1}{2}\sqrt{3}.$

β) $\sin 45^0 = \frac{1}{2}\operatorname{chord} 90^0 =$ „ „ „ „ „ Vierecks $= \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

γ) $\sin 36^0 = \frac{1}{2}\operatorname{chord} 72^0 =$ „ „ „ „ „ Fünfecks $= \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$

δ) $\sin 30^0 = \frac{1}{2}\operatorname{chord} 60^0 =$ „ „ „ „ „ Sechsecks $= \frac{1}{2}.$

ε) $\sin 22\frac{1}{2}^0 = \frac{1}{2}\operatorname{chord} 45^0 =$ „ „ „ „ „ Achtecks $= \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$

ζ) $\sin 18^0 = \frac{1}{2}\operatorname{chord} 36^0 =$ „ „ „ „ „ Zehnecks $= \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1).$

η) $\sin 15^0 = \frac{1}{2}\operatorname{chord} 30^0 =$ „ „ „ „ „ Zwölfecks $= \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

u. s. w.

§. 43.

Nach früheren Sätzen ist gezeigt, daß, wenn man nur die Sinus und Cosinus von $0^0 - 45^0$ oder von $0^0 - 30^0$ berechnet hat, sich aus ihnen durch gebildete Summen und Differenzen die übrigen finden lassen.

§. 44.

Um nun zunächst die Sinus und Cosinus von Winkeln, die von Minute zu Minute oder von Secunde zu Secunde fortschreiten, zu erhalten, reicht es hin, die eine dieser Functionen für den Winkel von 1′ oder 1″ zu kennen, weil aus ihr auch die andere Function gefunden werden kann, und aus beiden durch wiederholte Anwendung von den Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ alle übrigen berechnet werden können.

§. 45.

Zur Berechnung des Sinus von 1′ oder 1″ dient aber folgender Satz: Der Unterschied zwischen einem Bogen und seinem Sinus ist kleiner, als die dritte Potenz des Bogens oder, wenn α den Bogen oder seinen zugehörigen Winkel bezeichnet, so ist $\alpha - \sin\alpha < \alpha^3$.

Beweis: Denn $tg\,\alpha > \alpha > \sin\alpha$. Demnach ist $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > \alpha$ oder $\sin\alpha > \alpha \,.\, \cos\alpha$ oder $\sin\alpha > \alpha \,.\, \sqrt{1 - \sin\alpha^2}$. Da aber $\sin\alpha < \alpha$, so ist um so mehr $\sin\alpha > \alpha\sqrt{1 - \alpha^2}$. Da aber $1 - \alpha^2$ ein ächter Bruch ist, so ist $\sqrt{1 - \alpha^2}$ ein ächter Bruch, der größer als $1 - \alpha^2$ ist; umsomehr ist daher $\sin\alpha > \alpha\,(1 - \alpha^2)$ oder $\sin\alpha > \alpha - \alpha^3$ oder umgekehrt $\alpha - \sin\alpha < \alpha^3$.

§. 46.

Den Sinus von 1″ oder 1′ zu berechnen.

Soll der Sinus von einer Secunde oder Minute berechnet werden, so berechne man dafür seinen Bogen mit Hilfe der Zahl π und man erhält $arc\ 1'' = \frac{\pi}{180\,.\,60\,.\,60} = 0{,}000004848$ und $arc\ 1' = \frac{\pi}{180\,.\,60} = 0{,}0002908882$. Da nun $(arc\ 1'')^3 = (0{,}000004848)^3$ und $(arc\ 1')^3 = (0{,}0002908882)^3$, so ist der Unterschied zwischen Bogen und Sinus für 1′ auf jeden Fall kleiner, als eine Einheit der neunten Stelle und für 1″ kleiner als eine Einheit der vierzehnten Bruchstelle, und daher der Sinus in den ersten sieben Stellen fehlerfrei.

§. 47.

Aus den berechneten Sinus und Cosinus lassen sich dann nach den frühern Sätzen auch die übrigen Functionen finden; und so ist im Allgemeinen die Möglichkeit der Berechnung einer trigonometrischen Tafel, welche von Secunde zu Secunde oder von Minute zu Minute fortschreitet, dargethan.

Einrichtung der Tafeln.

§. 48.

Da jede trigonometrische Tafel eine genaue Beschreibung ihrer Einrichtung und ihres Gebrauchs enthält, so sollen hier nur die allgemeinen Grundzüge ihrer Einrichtung angedeutet werden:

1. Unter einer trigonometrischen Tafel versteht man eine Tabelle der trigonometrischen Functionen für alle spitzen Winkel, in bestimmten Intervallen, von Minute zu Minute oder von 10 zu 10 Secunden, fortschreitend und für den Radius = 1 auf eine bestimmte Anzahl von Bruchziffern, jetzt höchstens 7 berechnet.

2. Unter einer logarithmisch-trigonometrischen Tafel versteht man eine Tafel der briggeschen Logarithmen der trigonometrischen Functionen. Da die meisten Rechnungen in der Trigonometrie Multiplicationen oder Divisionen sind, und diese sich bei großen Zahlen und großer Genauigkeit leichter mit Logarithmen ausführen lassen, so enthalten die gewöhnlichen Tafeln nur die Logarithmen der trigonometrischen Functionen.

3. Um in den logarithmisch-trigonometrischen Tafeln für ächte Bruchfunctionen die negativen Characteristiken zu vermeiden, ist überall die Characteristik um 10 in den Tafeln erhöht. Rechnet man demnach mit Hilfe der Tafeln, so muß bei jedem Logarithmus einer Function die Characteristik 10 zugleich wieder subtrahirt werden.

4. Die Tafeln enthalten nur die Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten, da $log\ sec\,\alpha = -\,log\ cos\,\alpha$ und $log\ cosec\,\alpha = -\,log\ sin\,\alpha$ ist. Die Logarithmen der Tangenten und Cotangenten haben eine gemeinschaftliche Differenzreihe, da $log\ tg\,\alpha = -\,log\ ctg\,\alpha$.

5. Die Differenzen für die einzelnen Secunden müssen bei den Hauptfunctionen addirt und bei den Cofunctionen subtrahirt werden, da die Hauptfunctionen bei wachsenden Winkeln zunehmen, die Cofunctionen aber abnehmen.

6. Da jede Function $(45^0 - \alpha) = cofunct.\,(45 + \alpha)$ ist, so hat jede Tafel eine solche Einrichtung erhalten, daß an jedem Logarithmus diese doppelte Bedeutung hervortritt, und z. B. $log\,.\,sin\ 30^0\,20'$ zugleich auch den $log\,.\,cos\,.\ 59^0\,40'$ darstellt. —

§. 49.

Uebungsaufgaben im Gebrauch der Tafeln:

1. $lg.\ sin\ 14^0 20' = ?$	1. $log\ sin x = 9{,}6143850–10;\ x = ?$
2. $lg.\ cos\ 17^0 30' =$	2. $log\ cos x = 9{,}9274695–10$
3. $lg.\ ctg\ 70^0 15' =$	3. $log\ ctg x = 9{,}8091933–10$
4. $lg.\ tg\ 60^0 23' =$	4. $log\ tg x = 10{,}1891434–10$
5. $lg.\ cos\ 56^0\ 9'\ 4'' =$	5. $log\ cos x = 9{,}3251456–10$
6. $lg.\ tg\ 39^0 20' 14'' =$	6. $log\ tg x = 9{,}9634567–10$
7. $lg.\ sin\ 135^0 16' 14'' =$	7. $log\ sin x = 9{,}1345678–10$
8. $lg.\ cos\ 159^0\ 9' 18'' =$	8. $log\ cos x = -(9{,}3647231–10)$
9. $lg.\ tg\ 230^0 15' 30'' =$	9. $log\ tg x = -(10{,}3245678–10)$
10. $lg.\ cos\ 315^0\ 9'\ 5'' =$	10. $log\ cos x = -(9{,}6431459–10)$
11. $lg.\ sec\ 13^0 14' =$	11. $log\ sec x = 11{,}2314978–10$
12. $lg. cosec\ 19^0 20' =$	12. $log\ cosec x = 13{,}1934568–10.$

Anwendung der trigonometrischen Functionen.

§. 50.

Zur Zeichnung und Messung von Winkeln.

Die beiden geometrischen Aufgaben:

1. einen in Graden und Minuten gegebenen Winkel zu zeichnen,

und 2. einen gezeichneten Winkel in Graden und Minuten anzugeben,

lassen sich durch Anwendung der trigonometrischen Functionen und mit Hilfe eines sorgfältig gearbeiteten hunderttheiligen Maßstabes genauer lösen, als dies mit dem Transporteur möglich ist.

1. Soll ein in Graden und Minuten gegebener Winkel auf diese Weise gezeichnet werden, so mache man seinen einen Schenkel der Haupteinheit des

Maßstabes gleich, errichte in seinem Endpunkte ein Perpendikel und gebe demselben Länge und Richtung der Tangente des gegebenen Winkels. Verbindet man nun den Endpunkt des Perpendikels mit dem Anfangspunkte des Schenkels durch eine gerade Linie, so ist der gegebene Winkel gezeichnet.

2. Soll ein gezeichneter Winkel gemessen werden, so mache man seinen einen Schenkel wieder der Einheit gleich und errichte in seinem Endpunkte ein Perpendikel bis zum andern Schenkel oder dessen Verlängerung über die Spitze hinaus. Mißt man nun das Perpendikel nach demselben Maßstabe und sucht zu seiner Längenzahl ihrer Größe und Richtung nach den zu ihr als Tangente zugehörigen Winkel in der trigonometrischen Tafel, so ist der gegebene Winkel gemessen.

Bemerkung. 1. Ebensogut hätte man eine andere Function, z. B. den Sinus, dazu gebrauchen können; doch wird man in allen Fällen nur zwei Decimalstellen mit Sicherheit benutzen, also die Winkel höchstens bis auf halbe, Drittel- oder Viertel-Grad bestimmen können. — Für welche Winkelgrößen die eine oder andere Function weniger brauchbar zu diesen Aufgaben wird, läßt sich einfach aus den Grenzwerthen der einzelnen Functionen bestimmen. 2. Zur Uebung mögen einige Winkel gezeichnet und gemessen und ihre Resultate mit denen des Transporteurs verglichen werden.

§. 51.

Logarithmirung unlogarithmischer Ausdrücke im Allgemeinen.

Nach der Erklärung der trigonometrischen Functionen kann 1. jeder ächte Bruch als ein Sinus oder Cosinus und jede Zahl, ob ganz oder gebrochen, als Tangente oder Cotangente irgend eines Winkels gedacht werden, und 2. ist nach den ersten Grundbeziehungen der Functionen zu einander $1 - sin\,\alpha^2 = cos\,\alpha^2$ und $1 - cos\,\alpha^2 = sin\,\alpha^2$, sowie $1 + tg\,\alpha^2 = \frac{1}{cos\,\alpha^2}$ und $1 + ctg\,\alpha^2 = \frac{1}{sin\,\alpha^2}$.

Mit Hilfe dieser vier Formeln, die auf der linken Seite unlogarithmische Summen oder Differenzen, auf der rechten Seite aber eingliedrige logarithmische Ausdrücke enthalten, ist man im Stande, unlogarithmische Ausdrücke in logarithmische durch Einführung eines Hilfswinkels zu verwandeln. —

1. Logarithmirung einer Summe.

Soll die Summe $a + b$ in einen logarithmischen Ausdruck verwandelt werden, so verwandle man dieselbe durch Multiplication und Division mit

einem Posten, z. B. a in das gleiche Produkt $\left(1 + \frac{b}{a}\right) a$. Setzt man nun in der Summe $1 + \frac{b}{a}$ die Wurzel aus dem Quotienten gleich der Tangente irgend eines näher zu bestimmenden Hilfswinkels φ oder in Zeichen:

Setzt man $\sqrt{\frac{b}{a}} = tg\,\varphi$, so wird der unlogarithmische Ausdruck

1. $a + b = \left(1 + \frac{b}{a}\right) a = (1 + tg\,\varphi^2)\; a = sec\,\varphi^2\, a = \frac{a}{cos\,\varphi^2}$.

Ebenso wird

2. aus $a^2 + b^2$, wenn man $\frac{b}{a} = tg\,\varphi$ setzt, $a^2 + b^2 = \frac{a^2}{cos\,\varphi^2}$,

3. aus $\sqrt{a^2+b^2}$, wenn man $\frac{b}{a} = tg\varphi$ setzt, $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{a^2}{cos\varphi^2}} = \frac{a}{cos\varphi}$,

4. aus $ab + cd$, wenn man $\sqrt{\frac{cd}{ab}} = tg\,\varphi$ setzt, $ab + cd = \frac{ab}{cos\,\varphi^2}$.

5. Soll der Ausdruck $m\,sin\,\alpha + n\,cos\,\alpha$ logarithmirt werden, so multiplicire und dividire man den Ausdruck mit m oder n.

Setzt man 1. den Quotienten $\frac{n}{m} = tg\,\varphi$, so erhält man $m\,sin\,\alpha + n\,cos\,\alpha$

$$= (sin\,\alpha + \frac{n}{m} \quad cos\,\alpha) \;\; m = (sin\,\alpha + tg\,\varphi\,.\,cos\,\alpha)\; m$$

$$= (sin\,\alpha + \frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi}.\,cos\,\alpha)\; m = \frac{(sin\,\alpha\,.\,cos\,\varphi + sin\,\varphi\,.\,cos\,\alpha)}{cos\,\varphi}\; m$$

$$= \frac{sin\,(\alpha + \varphi}{cos\,\varphi}\,.\,m \qquad = \frac{sin\,(\alpha + \varphi)}{sin\,\varphi}\,.\,n,$$ da

$\frac{n}{m} = \frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi}$ und also $\frac{n}{sin\,\varphi} = \frac{m}{cos\,\varphi}$ ist.

Setzt man 2. den Quotienten $\frac{m}{n} = tg\,.\,\psi$, so erhält man ebenso leicht

$$m\,sin\,\alpha + n\,cos\,\alpha = \frac{cos\,(\alpha - \psi)}{cos\,\psi}\,.\,n$$

$$= \frac{cos\,(a - \psi)}{sin\,\psi}\,.\,m.$$

2. Logarithmirung einer Differenz.

Soll eine Differenz $a - b$ in einen logarithmischen Ausdruck verwandelt werden, so multiplicire und dividire man mit dem größern Gliede in die

Differenz, um einen ächten Bruch zu erhalten. Setzt man wieder, wie bei der Umformung der Summe, die Wurzel aus dem Quotienten gleich dem Sinus eines Hilfswinkels φ, so erhält man leicht auf ähnliche Weise den gesuchten logarithmischen Ausdruck.

1. Aus $a - b$ wird, wenn $a > b$ und $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sin\varphi$ ist, $a - b = \left(1 - \frac{b}{a}\right) a = (1 - \sin\varphi^2)\, a = a \,.\, \cos\varphi^2$.

2. Aus $a^2 - b^2$ wird, wenn $a^2 > b^2$ und $\frac{b}{a} = \sin\varphi$ ist, $a^2 - b^2 = a^2 \,.\, \cos\varphi^2$.

3. Aus $\sqrt{a^2 - b^2}$ wird, wenn $a^2 > b^2$ und $\frac{b}{a} = \sin\varphi$ ist, $\sqrt{a^2 - b^2} = a \,.\, \cos\varphi$.

4. Aus $ab - cd$ wird, wenn $ab > cd$ und $\sqrt{\frac{cd}{ab}} = \sin\varphi$ ist, $ab - cd = ab \,.\, \cos\varphi^2$.

5. Soll der Ausdruck $m \sin\alpha - n \cos\alpha$ logarithmirt werden, so erhält man leicht, wenn man $\frac{n}{m} = tg\,\varphi$ und $\frac{m}{n} = tg\,\psi$ setzt,

$$1)\; m \sin\alpha - n \cos\alpha = m \,.\, \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} = n \,.\, \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\varphi},$$

$$2)\; m \sin\alpha - n \cos\alpha = -n \,.\, \frac{\cos(\alpha + \psi)}{\cos\psi} = -m \,.\, \frac{\cos(\alpha + \psi)}{\sin\psi}.$$

6. Soll endlich der Ausdruck $m \,.\, \frac{a \pm b}{a \mp b}$ in einen logarithmischen Ausdruck verwandelt werden, so setze man den Quotienten $\frac{b}{a} = tg\,\varphi$ und forme auf ähnliche Weise wie früher, Zähler und Nenner um, so erhält man:

$$m \,.\, \frac{a \pm b}{a \mp b} = m \,.\, \frac{1 \pm tg\,\varphi}{1 \mp tg\,\varphi} = m \,.\, tg\,(45^0 \pm \varphi).$$

Bemerkung. Bei der Umformung hätte man ebenso gut bei der Summe die Cotangente und bei der Differenz den Cosinus gebrauchen können, um ganz ähnliche Formeln zu erhalten.

§. 52.

Auflösung der gemischten quadratischen Gleichungen.

Der trigonometrischen Functionen bedient man sich auch zur Lösung derjenigen gemischten quadratischen Gleichungen, deren Coefficienten vielzifferige

Zahlen sind, mit denen sich bei der gewöhnlichen algebraischen Auflösung unbequem rechnen läßt. Hat man die gemischte quadratische Gleichung auf die allgemeine Form $x^2 \pm ax = \pm b$ gebracht, so ist ihre allgemeine Auflösungsformel $x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} \pm b} = \frac{a}{2}\left(\mp 1 \pm \sqrt{1 \pm \frac{4b}{a^2}}\right)$ in passenderer Form für die Logarithmirung.

Da es bei der Umformung dieses Ausdruckes besonders auf den Wurzelausdruck $\sqrt{1 \pm \frac{4b}{a^2}}$ ankommt, der entweder eine Summe oder Differenz ist, so unterscheiden wir auch bei der Ableitung die beiden Hauptformen der gemischten quadratischen Gleichungen in Bezug auf das Vorzeichen des bekannten Gliedes und suchen

$$1)\; \text{für } x = \frac{a}{2}\left(\mp 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right) \text{ aus } x^2 \pm ax = b \text{ und}$$

$$2)\; \text{für } x = \frac{a}{2}\left(\mp 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right) \text{ aus } x^2 \pm ax = -b$$

den entsprechenden logarithmischen Ausdruck.

1. Ist $x = \frac{a}{2}\left(\mp 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}\right)$ aus $x^2 \pm ax = b$ zu logarithmiren, so beachte man erst nur das obere Vorzeichen von ax und setze nach den frühern Sätzen in $\sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}}$, $\frac{2\sqrt{b}}{a} = tg\,\varphi$ und aus dieser Gleichung für $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{tg\,\varphi} = \frac{\sqrt{b} \,.\, \cos\varphi}{\sin\varphi}$, so erhält man $x = \frac{\sqrt{b} \,.\, \cos\varphi}{\sin\varphi}$ $\left(-1 \pm \sqrt{1 + tg\,\varphi^2}\right) = \frac{\sqrt{b} \,.\, \cos\varphi}{\sin\varphi} \left(-1 \pm \sec\varphi\right) = \frac{\sqrt{b} \,.\, \cos\varphi}{\sin\varphi}$ $\left(-1 \pm \frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{\sqrt{b} \,.\, \cos\varphi}{\sin\varphi} \left(\frac{-\cos\varphi \pm 1}{\cos\varphi}\right) = \frac{\sqrt{b}}{\sin\varphi}\,(\pm 1 - \cos\varphi)$.

Nimmt man nun in dem Ausdrucke $(\pm 1 - \cos\varphi)$ erst das obere Vorzeichen vor 1 und setzt $1 - \cos\varphi = 2 \sin {}^1\!/_2\varphi^2$ und $\sin\varphi = 2 \sin {}^1\!/_2\varphi$ $\cos {}^1\!/_2\varphi$, so erhält man für x

$$x' = \frac{\sqrt{b}}{\sin\varphi}\,(1 - \cos\varphi) = \frac{\sqrt{b} \,.\, 2 \sin {}^1\!/_2\varphi^2}{2 \sin {}^1\!/_2\varphi \,.\, \cos {}^1\!/_2\varphi} = \sqrt{b} \,.\, tg\,{}^1\!/_2\varphi.$$

Nimmt man ebenso das untere Vorzeichen von 1 und substituirt wie früher, so erhält man:

$$x'' = \frac{\sqrt{b}}{\sin\varphi}(-1 - \cos\varphi) = -\frac{\sqrt{b}}{\sin\varphi}\ (1 + \cos\varphi)$$

$$= -\frac{\sqrt{b}\,.\,2\cos{}^1/_2\varphi^2}{2\sin{}^1/_2\varphi\,\cos{}^1/_2\varphi} = -\sqrt{b}\,.\,ctg\,{}^1/_2\varphi.$$

Ist demnach $x^2 + ax = b$ die Gleichung und $\frac{2\sqrt{b}}{a} = tg\,\varphi$, so ist $x' = \sqrt{b}\,.\,tg\,{}^1/_2\varphi$; $x'' = -\sqrt{b}\,.\,ctg\,{}^1/_2\varphi$.

Ist dagegen $x^2 - ax = b$ zu logarithmiren, so erhält man durch eine ähnliche Umformung, wenn wieder $\frac{2\sqrt{b}}{a} = tg\,\varphi$ gesetzt wird,

$$x' = -\sqrt{b}\,.\,tg\,{}^1/_2\varphi;\quad x'' = \sqrt{b}\,.\,ctg\,{}^1/_2\varphi.$$

Bemerkung. Die beiden für x aus $x^2 - ax = b$ gefundenen Werthe kann man auch gleich aus der Gleichung für $x^2 + ax = b$ ableiten, da zwei quadratische Gleichungen mit gleichen Coefficienten und entgegengesetzten Vorzeichen vor x gleiche, aber entgegengesetzte Wurzeln haben müssen.

2. Ist $x = \frac{a}{2}\left(\mp 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\right)$ aus $x^2 \pm ax = -b$ zu logarithmiren, so beachte man zuerst, wenn $\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}$ reell oder $a^2 > 4b$ ist, nur das obere Vorzeichen vor ax und setze in $\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}\ \frac{2\sqrt{b}}{a} = \sin\varphi$ und aus dieser Gleichung für $\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{\sin\varphi}$, so erhält man $x = \frac{\sqrt{b}}{\sin\varphi}$ $(-1 \pm \sqrt{1 - \sin\varphi^2}) = \frac{\sqrt{b}}{\sin\varphi}(-1 \pm \cos\varphi) = -\frac{\sqrt{b}}{\sin\varphi}(1 \mp \cos\varphi)$ und aus ihr durch ähnliche Substitutionen wie in 1.

$$x' = -\frac{\sqrt{b}\,.\,2\sin{}^1/_2\varphi^2}{2\sin{}^1/_2\varphi\ \cos{}^1/_2\varphi} = -\sqrt{b}\,.\,tg\,{}^1/_2\varphi$$

$$\text{und } x'' = -\frac{\sqrt{b}\,.\,2\cos{}^1/_2\varphi^2}{2\sin{}^1/_2\varphi\,.\,\cos{}^1/_2\varphi} = -\sqrt{b}\ ctg\,{}^1/_2\varphi.$$

Ist dagegen $x^2 - ax = -b$ zu logarithmiren, so erhält man nach der Bemerkung in 1. unmittelbar, wenn man wieder $\frac{2\sqrt{b}}{a} = \sin\varphi$ setzt,

$$x' = \sqrt{b}\,.\,tg\,{}^1/_2\varphi;\quad x'' = \sqrt{b}\ ctg\,{}^1/_2\varphi.$$

Stellt man die gewonnenen vier Formeln zusammen, so erhält man:

1. für $x^2 \pm ax = b$, wenn $\frac{2\sqrt{b}}{a} = tg\,\varphi$ ist, $x' = \pm\sqrt{b}\,.\,tg\,{}^1/_2\varphi$

$$x'' = \mp\sqrt{b}\,.\,ctg\,{}^1/_2\varphi$$

2. für $x^2 \pm ax = -b$, wenn $\frac{2\sqrt{b}}{a} = \sin\varphi$ ist, $x' = \mp\sqrt{b}\,.\,tg\,{}^1/_2\varphi$

$$x'' = \mp\sqrt{b}\,.\,ctg\,{}^1/_2\varphi.$$

Bemerkung. Durch ähnliche Umformungen wie in 2. könnten auch die imaginairen Wurzeln der Gleichung $x^2 \pm ax = -b$ gefunden werden, wenn in ihr $\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}$ imaginair und $a^2 < 4b$ ist; allein ihre Ableitung mag dem eigenen Studium überlassen bleiben, da sie für praktische Aufgaben keine Bedeutung haben.

Auflösung reducirter kubischer Gleichungen.

§. 53.

Aus der Algebra setzen wir als bekannt voraus, daß jede reducirte kubische Gleichung drei Wurzeln hat, die entweder alle drei reell sind oder von denen nur eine reell, die beiden anderen aber imaginair sind. Eine reelle Wurzel hat immer das entgegengesetzte Vorzeichen des bekannten Gliedes; und diejenigen Gleichungen haben gleiche, aber entgegengesetzte Wurzeln, die sich nur durch das Vorzeichen des bekannten Gliedes unterscheiden.

Jede kubische Gleichung läßt sich auf die Form $x^3 + bx + q = o$ bringen, und für sie giebt die Cardanische Formel als Wurzel

$$x' = u + v = \sqrt[3]{-{}^1/_2 q + \sqrt{{}^1/_4 q^2 + \frac{p^3}{27}}}$$

$$+ \sqrt[3]{-{}^1/_2 q - \sqrt{{}^1/_4 q^2 + \frac{p^3}{27}}}.$$

Durch Division mit dem Wurzelfactor $x - (u + v)$ erhält man die beiden anderen Wurzeln

$$x'' = -{}^1/_2(u + v) + {}^1/_2 i(u - v)\sqrt{3},$$
$$x''' = -{}^1/_2(u + v) - {}^1/_2 i(u - v)\sqrt{3}.$$

Für die Logarithmirung der Auflösungsformel haben wir nur auf das Vorzeichen von p zu achten, da entgegengesetzte Vorzeichen von q bei gleichen Vorzeichen von p, gleiche, aber entgegengesetzte Wurzeln geben, und demnach zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem p positiv oder negativ ist.

§. 54.

Auflösung der Gleichung $x^3 + px + q = o$.

Für $x^3 + px + q = o$ ist $x' = u + v$

$$= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}\right)} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q\left(-1 - \sqrt{1 + \frac{4p^3}{27q^2}}\right)}.$$

Setzt man nun $\frac{4p^3}{27q^2} = tg\,\varphi^2$ und $\frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3} = tg\,\varphi$, so ist $\frac{q}{2} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{\cos\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}$. Substituirt man diese Werthe in die Auflösungsformel, so erhält man:

$$x' = \sqrt[3]{\frac{\cos\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}\left(-1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right)\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{\cos\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}\left(-1 - \frac{1}{\cos\varphi}\right)\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

und aus ihr durch einige leichte Zusammenziehungen

$$x' = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{tg\,\tfrac{1}{2}\varphi} - \sqrt[3]{ctg\,\tfrac{1}{2}\varphi}\right).$$

Setzt man nun $\sqrt[3]{tg\,\frac{1}{2}\varphi} = tg\,\psi$ und $\sqrt[3]{ctg\,\frac{1}{2}\varphi} = ctg\,\psi$, so ist $x' = \sqrt{\frac{p}{3}}\,(tg\,\psi - ctg\,\psi)$. Da aber nach Formel 56 (§. 39) $tg\,\psi - ctg\,\psi = -2\,ctg\,2\psi$ ist, so erhält man $x' = -2\,ctg\,2\psi\sqrt{\frac{p}{3}}$

$$x'',\ x''' = ctg\,2\psi\sqrt{\frac{p}{q}} \pm i \,.\, \frac{1}{\sin 2\psi}\sqrt{p}.$$

Hat q das negative Vorzeichen, so haben die drei Wurzeln die entgegengesetzten Vorzeichen.

§. 55.

Auflösung der Gleichung $x^3 - px + q = o$.

Für $x^3 - px + q = o$ ist $x' = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q\left(-1 + \sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)}$ $+ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q\left(-1 - \sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)}$. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $1 - \frac{4p^3}{27q^2} = o$ oder positiv oder negativ ist. Ist $1 - \frac{4p^3}{27q^2} = o$, so fällt das Glied $\sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}$ aus und man erhält in diesem Falle x' durch einfache Wurzelausziehung und aus ihr leicht die beiden anderen imaginairen Wurzeln. Ist dagegen $1 - \frac{4p^3}{27q^2}$ positiv, also $1 > \frac{4p^3}{27q^2}$, so setze man $\frac{4p^3}{27q^2} = \sin\varphi^2$ und $\frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sin\varphi$, so ist $\frac{q}{2} = \frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}$ $= \frac{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2\sin\frac{1}{2}\varphi \,.\, \cos\frac{1}{2}\varphi}$. Substituirt man diese Werthe in die Auflösungsformel, wie vorhin, so erhält man

$$x' = \sqrt[3]{\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\varphi \,.\, \cos\frac{1}{2}\varphi}(-1 + \cos\varphi)\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\varphi \,.\, \cos\frac{1}{2}\varphi}(-1 - \cos\varphi)\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

und aus ihr durch eine leichte Umformung

$$x' = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{tg\,\tfrac{1}{2}\varphi} + \sqrt[3]{ctg\,\tfrac{1}{2}\varphi}\right).$$ Setzt man nun wieder $\sqrt[3]{tg\,\frac{1}{2}\varphi} = tg\,\psi$ und $\sqrt[3]{ctg\,\frac{1}{2}\varphi} = ctg\,\psi$, so erhält man durch eine ähn-

liche Umformung wie in §. 54 $x' = -\frac{2}{\sin 2\psi}\sqrt{\frac{p}{3}}$ und aus ihr wie in §. 54 die beiden anderen imaginairen Wurzeln. —

§. 56.

Auflösung des casus irreducibilis.

Da die ähnliche Ableitung der trigonometrischen Auflösung für $x^3 - px + q = o$, wenn $1 - \frac{4p^3}{27q^2}$ negativ oder $1 < \frac{4p^3}{27q^2}$ ist, oder für den sogenannten casus irreducibilis, die Kenntniß der imaginairen Exponentialgrößen und namentlich des Moivre'schen Theorems voraussetzt, so wählen wir hier eine andere Auflösung, welche keine weitere Kenntnisse der Analysis voraussetzt, wohl aber zu neuen trigonometrischen Betrachtungen und Ableitungen Veranlassung giebt. Ordnen wir die Formel für $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin\alpha^3$ nach $\sin\alpha$ und reduciren sie auf o, so erhalten wir in

1) $\sin\alpha^3 - {}^3/_4 \sin\alpha + \frac{\sin 3\alpha}{4} = o$ eine kubische Gleichung, welche dazu dient, um aus dem bekannten Sinus des dreifachen Winkels (3α) den Sinus des einfachen Winkels (α) zu finden. Denken wir uns ferner die kubische Gleichung

2) $x^3 - px + q = o$ gegeben, so lassen sich beide Gleichungen leicht mit einander vergleichen und die eine aus der andern ableiten. Setzt man nämlich

3) $x = r\sin\varphi$, worin r ein näher zu bestimmender Factor und φ ein näher zu bestimmender Winkel ist, so verwandelt sich die zweite Gleichung in $r^3\sin\varphi^3 - pr\sin\varphi + q = o$ und wenn man mit r^3 dividirt in

4) $\sin\varphi^3 - \frac{p}{r^2}\sin\varphi + \frac{q}{r^3} = o.$

Die beiden Gleichungen 1 und 4 werden identisch, wenn $\frac{p}{r^2} = {}^3/_4$ und $\frac{q}{r^3} = \frac{\sin 3\varphi}{4}$ gesetzt wird. Aus den beiden Gleichungen ergiebt sich aber

5) $r = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$ und

6) $\sin 3\varphi = \frac{4q}{r^3}$, d. h. man erhält erst r und alsdann $\sin 3\varphi$, und also auch 3φ selbst und aus ihm φ. Sobald nun aber φ und r bekannt sind, erhält man aus ihnen x selbst durch die Gleichung $x = r\sin\varphi$.

Allein hier findet scheinbar eine vollständige Unbestimmtheit statt; denn wenn von einem Winkel (3φ) nur der Sinus ohne Vorzeichen gegeben ist, so können zu diesem Sinus unendlich viele Winkel gehören und zwar 3φ, $2.90 - 3\varphi$, $4.90 + 3\varphi$, $6.90 - 3\varphi$, $8.90 + 3\varphi$ u. s. w., weil alle diese Winkel einen und denselben Sinus besitzen.

Nimmt man von diesen Winkeln den dritten Theil, so erhält man als neue entsprechende Winkelreihe für φ:

φ, $2.30 - \varphi$, $4.30 + \varphi$, $6.30 - \varphi$, $8.30 + \varphi$ u. s. w.

Da nun jeder in die Gleichung $x = r\sin\varphi$ substituirt werden kann, so scheint die Gleichung unendlich viele Wurzeln zu haben und zwar $x' = r\sin\varphi$; $x'' = r\sin(60 - \varphi)$; $x''' = r\,.\sin(120 + \varphi)$; $x'''' = r\,.\sin(180 - \varphi)$ u. s. w. Wenn man die Werthe der Winkel jedoch genauer in's Auge faßt, so bemerkt man leicht, daß ihre Sinus auf drei verschiedene zurückkommen, nämlich auf $\sin\varphi$, $\sin(60 - \varphi)$ und $\sin(60 + \varphi)$. Demnach sind die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 - px + q = o$
$x' = r\,.\sin\varphi$; $x'' = r\,.\sin(60 - \varphi)$; $x''' = -r\sin(60 + \varphi)$.
Die drei Wurzeln der Gleichung $x^3 - px - q = o$, die den eben gefundenen Werthen entgegengesetzt sein müssen, sind demnach:

$x' = -r\,.\sin\varphi$; $x'' = -r\sin(60 - \varphi)$; $x''' = r\,.\sin(60 + \varphi)$.

§. 57.

Stellt man die gewonnenen Gleichungen für den praktischen Gebrauch zusammen, so hat man

1. für $x^3 + px \pm q = o$; 1) $\frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3} = tg\varphi$; 2) $\sqrt[3]{tg\,{}^1/_2\varphi} = tg\psi$; $x' = \mp 2\,ctg\,2\psi\sqrt{\frac{p}{3}}$.

2. für $x^3 - px \pm q = o$; wenn $1 > \frac{4p^3}{27q^2}$; 1) $\frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sin\varphi$; 2) $\sqrt[3]{tg\,{}^1/_2\varphi} = tg\psi$; $x' = \mp\frac{2}{\sin 2\psi}\sqrt{\frac{p}{3}}$.

3. für $x^3 - px \pm q$, wenn $1 < \frac{4p^3}{27q^2}$; 1) $r = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$; 2) $\sin 3\varphi = \frac{4q}{r^3}$; 3) $x' = \pm r\sin\varphi$; 4) $x'' = \pm r\sin(60^0 - \varphi)$; 5) $\mp r\,.\sin(60^0 + \varphi)$.

§. 58.

Uebungsaufgaben.

1. $\sqrt{a^2+b^2}$ mit Hilfe der trigonometrischen Functionen zu berechnen, wenn $a = 3{,}2451$ und $b = 2{,}3467$ ist.

2. $\dfrac{a+b}{a-b}$ auf dieselbe Weise zu berechnen, wenn $a = 9{,}4567$ und $b = 3{,}2598$ ist.

3. $x^2 + 1{,}1102\ x = 3{,}3594$ trigonometrisch zu lösen.

4. $7{,}3527\ x^2 - 148{,}87107 = 38{,}81507\,x$ trigonometrisch zu lösen.

5. $x^3 + 3x - 5 = o$ trigonometrisch zu lösen.

6. $x^3 - 4x - 5 = o$ " " "

7. $x^3 - 7x + 6 = o$ " " "

Bemerkung. Die vorstehenden Gleichungen sind aus Heis' Aufgabensammlung genommen, wo sich ein großer Reichthum von ähnlichen Beispielen findet.

§. 59.

Uebergang.

Nachdem wir Zweck, Begriff, Zusammenhang und Berechnung der trigonometrischen Functionen kennen gelernt und uns mit dem Gebrauche der Tafeln zur Ausführung von Ziffernrechnungen vertraut gemacht haben, wenden wir uns jetzt zum zweiten Hauptabschnitte, zu der Berechnung der Figuren selbst und ihrer Verwendung zur Lösung praktischer Aufgaben. —

Zweiter Abschnitt.

Von der Berechnung der Figuren.

§. 60.

Die Berechnung der Figuren geht von der einfachsten Figur, dem rechtwinkligen Dreieck aus und führt die Berechnung aller übrigen Figuren durch Zerlegung in Dreiecke auf die Berechnung desselben zurück.

Sie beginnt mit dem rechtwinkligen Dreieck, schreitet von ihm zum gleichschenkligen Dreieck, zur regulären Figur und zum Kreise fort, schließt daran die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks und führt die Berechnung der Polygone auf die Berechnung des Dreiecks zurück, oder stellt in der Polygonometrie besondere Lehrsätze für die Berechnung der Polygone auf. Endlich zeigt sie die Verwendung der trigonometrischen Sätze zur Lösung praktischer Aufgaben, namentlich zur Bestimmung der Entfernung unzugänglicher Punkte und zur Höhenmessung, den beiden Grundaufgaben der Geodäsie. —

A. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

§. 61.

Zur Bestimmung des rechtwinkligen Dreiecks sind zwei Stücke, zwei Seiten oder eine Seite und ein Winkel nöthig; jede Aufgabe über das rechtwinklige Dreieck enthält demnach drei Stücke, zwei unabhängige und ein abhängiges, unter denen nothwendig zwei Seiten sein müssen, da zwei Winkel nicht unabhängig von einander sind. Die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks führt daher auf zwei Grundaufgaben:

a. eine Gleichung für drei Seiten zu suchen,
b. eine Gleichung für zwei Seiten und einen Winkel zu suchen.

Aus den Auflösungen der beiden gefundenen Gleichungen erhält man die Formeln für alle verschiedenen einfachen rechtwinkligen Dreiecksaufgaben, in denen als Bestimmungsstücke Seiten und Winkel gegeben sind.

§. 62.

Aufsuchung der Gleichung für drei Seiten und der in ihr enthaltenen Formeln.

Die Gleichung für drei Seiten ist in der Geometrie längst gefunden; sie ist in dem pythagoräischen Lehrsatze ausgesprochen und in der Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$ ausgeprägt. Aus ihr erhält man durch Auflösung für a, b, c zwei wesentlich verschiedene Formeln.

1. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ für die Berechnung der Hypotenuse aus den Katheten,
2. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ oder $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ für die Berechnung einer Kathete aus der Hypotenuse und der andern Kathete.

Bemerkung. Die Formel $\sqrt{c^2 - a^2}$ ist für die Rechnung bequemer, da sie $= \sqrt{(c + a)(c - a)}$ und also logarithmisch ist, während $\sqrt{a^2 + b^2}$ erst durch Anwendung der trigonometrischen Functionen, nach §. 51, I. 3, logarithmirt werden muß. —

§. 63.

Aufsuchung der Gleichung für zwei Seiten und einen Winkel und der in ihr enthaltenen Formeln.

Für zwei Seiten und einen Winkel findet man die Gleichung unmittelbar aus dem Begriffe der Functionen, wenn man die beiden in der Aufgabe vorkommenden Seiten zu einem trigonometrischen Quotienten in Bezug auf den in der Aufgabe gleichfalls vorkommenden Winkel verbindet. Um Secanten und Cosecanten zu vermeiden, muß man in dem zu bildenden Quotienten die Hypotenuse zum Nenner machen.

Löset man die gefundene Gleichung für die gesuchte Größe auf, so erhält man unmittelbar auch die nöthige Rechnungsformel für die Unbekannte.

Beispiel: Soll a aus α, b bestimmt werden, so erhält man $\frac{a}{b} = tg\,\alpha$ oder $\frac{b}{a} = ctg\,\alpha$ und aus ihnen

$$a = b\,tg\,\alpha \text{ oder } a = \frac{b}{ctg\,\alpha}.$$

Uebungsaufgaben.

Für folgende Aufgaben sollen die Formeln aufgesucht und logarithmirt werden:

1. a aus b und c zu finden.
2. a „ c „ α „ „
3. a „ b „ α „ „
4. b „ a „ α „ „
5. b „ c „ β „ „
6. c „ a „ α „ „

§. 64.

Aufsuchung der Gleichungen für den Flächeninhalt.

Da durch die Bestimmungsstücke eines Dreiecks auch sein Flächeninhalt mitgegeben ist, der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks aber $\frac{ab}{2}$ ist, so hat man, wenn a und b nicht unmittelbar zur Berechnung der Fläche gegeben sind, a und b durch die gegebenen Stücke auszudrücken und ihre Werthe in der Gleichung für $J = \frac{ab}{2}$ zu substituiren.

1. Für J aus beiden Katheten hat man unmittelbar $J = \frac{ab}{2}$.
2. Für J aus Kathete (a) und anliegendem Winkel (β) hat man $b = a\,.\,tg\,\beta$; $J = \frac{a^2\,.\,tg\,\beta}{2}$.
3. Für J aus Kathete (a) und Gegenwinkel (α) hat man $b = a\,.\,ctg\,\alpha$; $J = \frac{a^2\,.\,ctg\,\alpha}{2}$.
4. Für J aus Hypotenuse (c) und Kathete (a) erhält man $b = \sqrt{c^2 - a^2}$; $J = \frac{a}{2}\sqrt{c^2 - a^2}$.
5. Für J aus Hypotenuse (c) und Winkel (α) hat man $a = c\,.\,sin\,\alpha$, $b = c\,.\,cos\,\alpha$; $J = \frac{c^2\,.\,sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha}{2} = \frac{c^2\,sin\,2\,\alpha}{4}$, da $sin\,\alpha\,.\,cos\,\alpha = \frac{sin\,2\,\alpha}{2}$ ist. —

§. 65.

Aufgabe.

Das rechtwinklige Dreieck ABC aus c und α zu berechnen, wenn $c = 949$ und $\alpha = 71^0\ 30'\ 28''$ ist.

Nach den früheren Paragraphen ist:

1. $\beta = 90^0 - \alpha$.
2. $a = c \,.\, \sin\alpha$.
3. $b = c \,.\, \cos\alpha$.
4. $J = \dfrac{c^2 \,.\, \sin 2\alpha}{4}$.

Da nun nach den Tafeln

$$\left.\begin{array}{l} \log c \quad\; = 2{,}9972662 \\ \log \sin\alpha = 9{,}9769763 - 10 \\ lg\ \cos\alpha = 9{,}5013002 - 10 \\ lg \sin 2\alpha = 9{,}7793065 - 10 \end{array}\right\} \text{ist, so ist } \left\{\begin{array}{l} lg\, a = lg\, c \quad\; + lg\ \sin\alpha \\ lg\, b = lg\, c \quad\; + lg\ \cos\alpha \\ lg\, J = 2 \log c + lg\ \sin 2\alpha - lg 4. \end{array}\right.$$

Daher $lg\, a = 2{,}9542435$ und

$lg\, b = 2{,}4785664$

$lg\, J = 5{,}1317789$

1. $\beta = 18^0\ 29'\ 32''$
2. $a = 900{,}0$
3. $b = 301{,}0$
4. $J = 135450{,}0$.

Bemerkung. Bei der Lösung bestimmter Zahlenaufgaben sondere man die einzelnen Operationen der Lösung scharf von einander ab und trenne namentlich das Nachdenken von dem mechanischen Rechnen und Aufschlagen in den Tafeln. Am raschesten, bequemsten und sichersten wird man zum Ziele gelangen, wenn man nach richtiger Erfassung der Aufgabe zuerst die nöthigen Formeln sämmtlich aufsucht und logarithmirt, dann in den Tafeln der Reihe nach sämmtliche zu gebrauchende Logarithmen aufschlägt, und die Rechnungen aufstellt und zuletzt mit Hilfe der Tafeln die gesuchten Zahlen bestimmt.

B. Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks.

§. 66.

Da jedes gleichschenklige Dreieck durch ein Perpendikel aus der Spitze in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke zerfällt, welche die Höhe und halbe Basis zu Katheten, den Winkel an der Basis und den halben Winkel an der Spitze zu Gegenwinkeln haben, so dienen die Gleichungen für das rechtwinklige Dreieck zugleich auch zur Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks. Da jedoch nur die halbe Basis und der halbe Winkel an der Spitze in diesen Gleichungen vorkommt, so muß aus ihnen durch Verdoppelung die ganze Basis und der ganze Winkel an der Spitze bestimmt werden. Bezeichnet man den Schenkel mit c, die Basis mit b und ihre Gegenwinkel mit γ und β, so erhält man für die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks folgende Formeln für die fünf Grundaufgaben.

gegeben	gesucht
$c,\ b.$	$\cos\gamma = \dfrac{{}^1/_2 b}{c}$. $\sin {}^1/_2\beta = \dfrac{{}^1/_2 b}{c}$. $h = \sqrt{c^2 - {}^1/_4 b^2}$. $J = \dfrac{b}{4}\sqrt{4c^2 - b^2}$.
$b,\ \gamma.$	$\beta = 180 - 2\gamma$. $c = \dfrac{{}^1/_2 b}{\cos\gamma}$. $h = {}^1/_2 b \,.\, tg\gamma$. $J = \dfrac{b^2}{4} \,.\, tg\gamma$.
$b,\ \beta.$	$\gamma = \dfrac{180 - \beta}{2}$. $c = \dfrac{{}^1/_2 b}{\sin {}^1/_2\beta}$. $h = {}^1/_2 b \,.\, \cos {}^1/_2\beta$. $J = \dfrac{b^2}{4} \,.\, \cos {}^1/_2\beta$.
$c,\ \gamma.$	$\beta = 180 - 2\gamma$. $b = 2c \,.\, \cos\gamma$. $h = c \,.\, \sin\gamma$. $J = c^2 \sin\gamma \,.\, \cos\gamma = \dfrac{c^2 \sin 2\gamma}{2} = \dfrac{c^2 \sin\beta}{2}$.
$c,\ \beta.$	$\gamma = \dfrac{180 - \beta}{2}$. $b = 2c \,.\, \sin {}^1/_2\beta$. $h = c \,.\, \cos {}^1/_2\beta$. $J = c^2 \sin {}^1/_2\beta \,.\, \cos {}^1/_2\beta = \dfrac{c^2 \,.\, \sin\beta}{2}$.

Beispiel: Das gleichschenklige Dreieck zu berechnen, wenn $c = 639{,}25$, $\gamma = 32^0\, 16'\, 44''$ ist, und nach den Tafeln:

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log c = 2{,}8056707$$
$$\log \sin\gamma = 9{,}7275745 - 10.$$
$$\log \cos\gamma = 9{,}9270924 - 10.$$

Nach Anwendung der Formeln findet man:

1. $\beta = 180^0 - 2\gamma = 180^0 - 64^0\, 33'\, 28'' = 115^0\, 26'\, 32''$.

2. $b = 2c \cdot \cos\gamma$; $\log b = \log 2 + \log c + \log \cos\gamma = 3{,}0337931$; $b = 1080{,}92$.

3. $h = c \sin\gamma$; $\log h = \log c + \log . \sin\gamma = 2{,}5332452$; $h = 341{,}386$.

4. $J = c^2 . \sin\gamma . \cos\gamma$; $\log J = 2 \log c + \log \sin\gamma + \log \cos\gamma = 5{,}2660083$; $J = 18450{,}0$.

§. 67.

Berechnung der regulären Figuren, Sehnen und Segmente.

Da jedes reguläre Vieleck durch die großen Radien in n congruente gleichschenklige und durch die großen und kleinen Radien in $2n$ congruente rechtwinklige Dreiecke zerfällt, so kommt auch die Berechnung der regulären Figuren auf die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks zurück. Als Seiten gleichschenkliger Dreiecke erscheinen auch die Sehnen im Kreise; daher läßt sich die Berechnung der Sehnen und der durch sie begrenzten Segmente gleichfalls auf die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke zurückführen. Bezeichnet man die Seite mit s, den großen Radius mit r, den kleinen Radius mit ϱ, den Polygonwinkel mit p, den Centriwinkel mit c und den Inhalt mit J, so erhält man, da c und p durch die Anzahl der Seiten schon mitgegeben sind und $\frac{1}{2} c = \frac{180}{n}$, $\frac{1}{2} p = \frac{(n-2)\,90}{n}$ ist, für die regulären Figuren nur drei Grundaufgaben und für sie durch einfache Anwendung der Gleichungen für das rechtwinklige oder gleichschenklige Dreieck folgende Formeln:

	Wenn r	ϱ	s gegeben
so ist	1. $\varrho = r . \sin \frac{1}{2} p = r . \cos \frac{1}{2} c$.	1. $r = \frac{\varrho}{\cos \frac{1}{2} c}$.	1. $\varrho = \frac{1}{2} s . tg \frac{1}{2} p$.
		$= \frac{\varrho}{\sin \frac{1}{2} p}$.	$= \frac{1}{2} s . ctg \frac{1}{2} c$.
	2. $s = 2r . \sin \frac{1}{2} c$.	2. $s = \frac{2\varrho}{tg \frac{1}{2} p}$.	2. $r = \frac{\frac{1}{2} s}{\sin \frac{1}{2} c}$.
	$= 2r . \cos \frac{1}{2} p$.	$= \frac{2\varrho}{ctg \frac{1}{2} c}$.	$= \frac{\frac{1}{2} s}{\cos \frac{1}{2} p}$.
	3. $J = n . \frac{r^2 \sin p}{2}$.	3. $J = \frac{n . \varrho^2}{tg \frac{1}{2} p}$.	3. $J = \frac{n . s^2\, tg \frac{1}{2} p}{4}$.
	$= n . \frac{r^2 \sin c}{2}$.	$= \frac{n . \varrho^2}{ctg \frac{1}{2} c}$.	$= \frac{n . s^2\, ctg \frac{1}{2} c}{4}$.

Bemerkung. Will man sich eine Tabelle über die regulären Vielecke entwerfen, so nimmt man die gegebene Linie als Einheit an; denn dann hat man zur Bestimmung irgend einer Linie oder des Flächeninhalts die betreffende Zahl der Tabelle nur mit der gegebenen Zahl oder ihrer Quadratzahl zu multipliciren, um die gesuchte Größe zu erhalten, da alle regulären Figuren von gleicher Seitenzahl ähnliche Figuren sind, deren gleichliegende Linien dasselbe Verhältniß haben, und deren Flächeninhalte sich wie die Quadrate gleichliegender Linien verhalten.

Tabelle über den Flächeninhalt regulärer Vielecke.

Seitenzahl	Flächeninhalt ausgedrückt durch		
	s	r	ϱ
3.	$0{,}4330127 . s^2$	$1{,}2990381 . r^2$	$5{,}1961524 . \varrho^2$
4.	$1 . s^2$	$2 . r^2$	$4 . \varrho^2$
5.	$1{,}7204775 . s^2$	$2{,}3776412 . r^2$	$3{,}6327125 . \varrho^2$
6.	$2{,}5980762 . s^2$	$2{,}5980762 . r^2$	$3{,}4641016 . \varrho^2$
7.	$3{,}6339127 . s^2$	$2{,}7364103 . r^2$	$3{,}3710222 . \varrho^2$
8.	$4{,}8284271 . s^2$	$2{,}8284271 . r^2$	$3{,}3137085 . \varrho^2$
9.	$6{,}1818242 . s^2$	$2{,}8925442 . r^2$	$3{,}2757318 . \varrho^2$
10.	$7{,}6942087 . s^2$	$2{,}9389265 . r^2$	$3{,}2491970 . \varrho^2$
11.	$9{,}3656415 . s^2$	$2{,}9735244 . r^2$	$3{,}2298915 . \varrho^2$
12.	$11{,}1961524 . s^2$	$3{,}0000000 . r^2$	$3{,}2153904 . \varrho^2$

C. Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.

§. 68.

Jedes schiefwinklige Dreieck läßt sich durch ein Perpendikel aus einer Winkelspitze auf die Gegenseite oder deren Verlängerung als die Summe oder Differenz von zwei rechtwinkligen Dreiecken darstellen.

Da jedes Dreieck durch drei von einander unabhängige Stücke bestimmt ist, wie die Congruenzsätze zeigen, so enthält jede Dreiecksaufgabe nothwendig vier Stücke (drei unabhängige und ein abhängiges), unter denen wenigstens zwei Seiten sein müssen, da drei Winkel nicht unabhängig sind und das vierte Stück nicht bestimmen. Die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks führt daher auf folgende drei Grundaufgaben:

a. eine Gleichung für zwei Seiten und zwei Gegenwinkel zu suchen,

b. eine Gleichung für zwei Seiten, einen Gegenwinkel und den eingeschlossenen Winkel zu suchen,

c. eine Gleichung für drei Seiten und einen Winkel zu suchen.

Um die Gleichungen für die drei Aufgaben zu finden, verfahre man in allen drei Fällen auf folgende Weise: Man fälle aus der Winkelspitze, welche nicht in der Aufgabe vorkommt, ein Perpendikel auf die Gegenseite oder deren Verlängerung, bestimme dies Perpendikel aus beiden rechtwinkligen Dreiecken durch die in der Aufgabe vorkommenden Stücke, verbinde die beiden Werthe zu einer Gleichung, so ist diese Gleichung die für die Aufgabe gesuchte. Löset man diese Gleichung für sämmtliche in ihr vorkommenden Größen auf, so erhält man für jede die zu ihrer Berechnung aus der Gleichung sich ergebende Formel, die freilich nicht überall zur logarithmischen Berechnung bequem sein wird, sondern oft noch eine Umformung erfordert oder die Einführung einer Hilfsgröße nöthig macht, um eine logarithmische Formel aus ihr herleiten zu können.

§. 69.

Die Gleichung für zwei Seiten und zwei Gegenwinkel zu suchen.

Soll die Gleichung für a, b, α, β gesucht werden, so fälle man aus C das Perpendikel CD, welches entweder auf AB selbst oder deren Verlängerung fällt, wie in

Fig. 10.

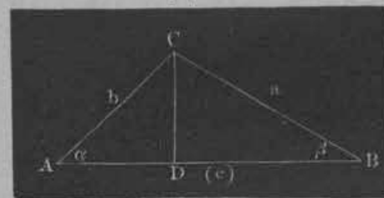
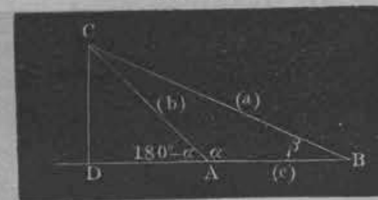


Fig. 11.



In beiden Fällen erhält man die rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD und aus ihnen für CD:
in Fig. 10, $CD = b\,.\,\sin\alpha$; in Fig. 11, $CD = b\,.\,\sin(180^0 - \alpha) = b\,.\,\sin\alpha$
und $CD = a\,.\,\sin\beta$ und $CD = a\,.\,\sin\beta$.

Daher in beiden Fällen 1. $b\,.\,\sin\alpha = a\,\sin\beta$.
Ebenso wird man für a, c, α, γ, 2. $a\,.\,\sin\gamma = c\,\sin\alpha$
und für b, c, β, γ, 3. $b\,.\,\sin\gamma = c\,\sin\beta$ erhalten.

Verwandelt man die Gleichungen in Proportionen, so lauten sie:

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$
$$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$$
$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma$$

oder in eine fortlaufende Proportion verwandelt:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

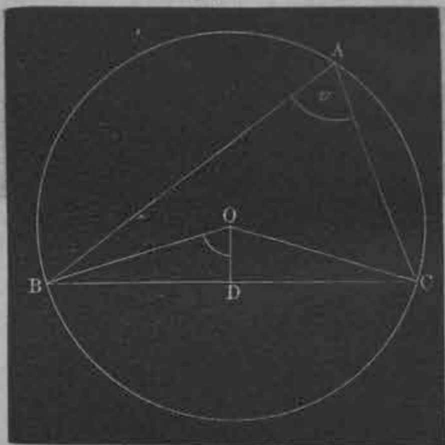
In dieser Form enthalten sie den Lehrsatz: In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die Sinus ihrer Gegenwinkel, den man kurz die Sinusregel zu benennen pflegt, und der den präcisen Ausdruck für das Verhältniß von Seiten und Gegenwinkeln enthält, das in der ganzen Geometrie unbestimmt gelassen werden mußte. Vertauscht man in den Proportionen $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ u. s. w. die mittleren Glieder, so erhält man $a : \sin\alpha = b : \sin\beta = c : \sin\gamma$ oder nach gewöhnlicher Schreibeweise $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ d. h. die Quotienten zwischen den Seiten und den Sinus ihrer Gegenwinkel sind einander gleich und zwar einem bestimmten constanten Ausdrucke gleich, der im nächsten Paragraphen näher bestimmt werden soll.

§. 70.

In jedem Dreiecke ist der Durchmesser des umschriebenen Kreises dem Quotienten aus einer Seite, dividirt durch den Sinus ihres Gegenwinkels, gleich.

Ist O der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, OD ein Perpendikel auf BC und OB und OC Radien, so ist

Fig. 12.



$BOD = \frac{1}{2} BOC = \alpha$, und $BD = BO \,.\, sin\, BOD$ oder $\frac{1}{2}\ a = r \,.\, sin \alpha$.

Daher $a = 2r\, sin\,\alpha = d \,.\, sin\,\alpha$ und $d = \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$.

§. 71.

Die Sinusregel enthält die Formeln für folgende zwei wesentlich verschiedene Aufgaben: 1. Aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel den andern Gegenwinkel und 2. aus zwei Winkeln und einer Gegenseite die andere Gegenseite zu suchen.

Für γ aus b, c, β erhält man 1. $sin\gamma = \frac{c \,.\, sin\,\beta}{b}$ und für

a aus b, α, β „ „ 2. $a = \frac{b \,.\, sin\,\alpha}{sin\,\beta}$.

Beide Formeln sind logarithmisch und bedürfen keiner weitern Umformung. Sollen jedoch aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleinern die Gegenseite des größern Winkels, die übrigen Stücke und der Inhalt berechnet werden, so entsteht nach den Lehren der Geometrie eine Zweideutigkeit, da durch zwei

Seiten und den Gegenwinkel der kleinern das Dreieck zweideutig bestimmt ist, wenn es überhaupt bestimmt und nicht rechtwinklig ist.

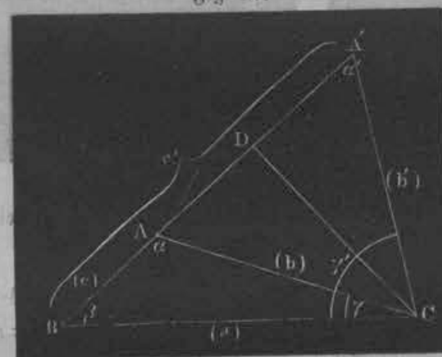
Um den Gang der Rechnung deutlich zu machen, mag folgende Aufgabe dienen.

§. 72.

Aufgabe. Aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleinern die fehlenden Stücke und den Flächeninhalt zu berechnen.

Ist zur Berechnung des Dreiecks ABC, a, b und β gegeben und $a > b$, so zeichne man einen Winkel $CBA = \beta$, mache $BC = a$ und ziehe von C aus $CD \perp AB$. Ist nun 1. $b < CD$ oder $b < a \,.\, sin\,\beta$, so entsteht

Fig. 13.



gar kein Dreieck. Ist 2. $b = CD = a \,.\, sin\,\beta$, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck BCD. Ist endlich 3. $b > CD$ oder $b > a \,.\, sin\,\beta$, so entstehen zwei verschiedene Dreiecke $A'BC$ und ABC, deren Winkel $\alpha + \alpha' = 2R$ sind. Sollen in beiden Dreiecken die fehlenden Stücke und der Inhalt berechnet werden, so hat man unmittelbar aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD 1. $CD = a \,.\, sin\,\beta$, dann im Dreieck $A'BC$ nach der Sinusregel 2. $sin\,\alpha' = \frac{a \,.\, sin\beta}{b}$ und aus ihr 3. α'. Da nun $\alpha' + \alpha = 180^0$, so ist 4. $\alpha = 180 - \alpha'$; 5. $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$; 6. $\gamma' = 180^0 - (\alpha' + \beta)$. Hierauf findet man durch wiederholte Anwendung der Sinusregel die dritten Seiten BA und BA' oder c und c' aus 8. $c = \frac{a \,.\, sin\gamma}{sin\,\alpha}$ und 9. $c' = \frac{a \,.\, sin\,\gamma'}{sin\,\alpha'}$. Den Flächeninhalt endlich der beiden Dreiecke ABC und $A'BC$ findet man 10. aus $\frac{AB \,.\, CD}{2} = \frac{a \,.\, c \,.\, sin\beta}{2}$ und 11. aus $\frac{A'B \,.\, CD}{2} = \frac{ac' \,.\, sin\,\beta}{2}$.

Beispiel: Ist $a = 409$; $b = 169$; $\beta = 17^0\, 3'\, 41{,}5''$, so ist
$CD = 120$; $\alpha' = 45^0\, 14'\, 23''$; $\alpha = 134^0\, 45'\, 37''$;
$\gamma = 28^0\, 10'\, 41{,}5''$; $\gamma' = 117^0\, 41'\, 55{,}5''$;
$c = 272$; $c' = 510$; $F = 16320$; $F' = 30600$. —

§. 73.

Die Gleichung zwischen zwei Seiten, dem eingeschlossenen Winkel und einem Gegenwinkel zu suchen.

I. Erste Ableitung. Soll die Gleichung zwischen a, b, α und γ gesucht werden, so fälle man aus B das Perpendikel BD auf AC oder deren Verlängerung in

Fig. 14.

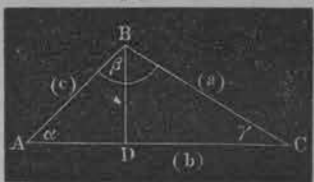
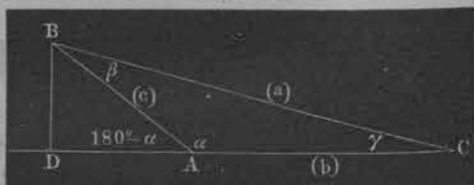


Fig. 15.



In beiden Fällen erhält man die rechtwinkligen Dreiecke ABD und BDC und aus ihnen

in Fig. 14	und in Fig. 15
aus $\triangle BDC$, 1. $BD = a \sin\gamma$	aus $\triangle BDC$, 1. $BD = a \sin\gamma$
und $CD = a \cos\gamma$	und $DC = a\,.\cos\gamma$
aus $\triangle ABD$, $AD = b - CD$	aus $\triangle ABD$, $AD = DC - b$
$= b - a\,.\cos\gamma$	$= a\,.\cos\gamma - b$
und 2. $BD = AD\,.\,tg\,\alpha$	und 2. $BD = AD\,.\,tg\,(180^0 - \alpha)$
$= (b - a\,.\cos\gamma)\,tg\alpha$	$= -AD\,.\,tg\,\alpha$
	$= -(a\,.\cos\gamma - b)\,tg\alpha$
	$= (b - a\,.\cos\gamma)\,tg\alpha$
Daher I. $a \sin\gamma = (b - a\,.\cos\gamma)\,tg\alpha$	I. $a \sin\gamma = (b - a\,.\cos\gamma)\,tg\alpha$.

Zweite Ableitung. Die eben gefundene Gleichung kann auch unmittelbar aus der Sinusregel auf folgende Art erhalten werden.

Soll die Gleichung für a, b, α, γ gefunden werden, so hat man nach der Sinusregel $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$. Da nun $\sin\beta = \sin(\alpha + \gamma)$, so ist $a : b = \sin\alpha : \sin(\alpha + \gamma)$ oder II. $a\,.\sin(\alpha + \gamma) = b\,.\sin\alpha$.

Beide Gleichungen, die auf den ersten Blick ganz heterogen zu sein scheinen, können natürlich nur verschiedene Ausdrücke für ein und dieselbe

Beziehung sein; und die eine kann aus der andern durch eine leichte Umformung erhalten werden. So erhält man z. B. die Gleichung I. aus der Gleichung II. auf folgende Weise:

$$\text{II. } a\,.\sin(\alpha + \gamma) = b\,.\sin\alpha$$
$$a\,(\sin\alpha\,.\cos\gamma + \cos\alpha\,.\sin\gamma) = b\,.\sin\alpha$$
$$a\,.\cos\alpha\,.\sin\gamma = b\,.\sin\alpha - a \sin\alpha\,.\cos\gamma$$
$$a\,.\cos\alpha\,.\sin\gamma = (b - a\,.\cos\gamma)\,\sin\alpha$$
$$\text{I. } a \sin\gamma = (b - a\,.\cos\gamma)\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = (b - a\,.\cos\gamma)\,\;tg\,\alpha.$$

Durch den umgekehrten Weg könnte man ebenso leicht von Gleichung I. zu Gleichung II. gelangen.

§. 74.

Aufgaben, die sich aus der Gleichung für zwei Seiten, den eingeschlossenen und den Gegenwinkel ergeben.

Die beiden Gleichungen des vorigen Paragraphen enthalten vier verschiedene Aufgaben und für sie die zu ihrer Berechnung dienenden Formeln. Sind a, b, γ, α die in der Dreiecksaufgabe vorkommenden Stücke, so giebt die Gleichung I.

für a aufgelöst die Formel:

$$1.\ a = \frac{b\,.\sin\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} \text{ für die Aufgabe:}$$

Aus zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite eine andere Seite zu finden,

für b aufgelöst:

$$2.\ b = \frac{a\,.\sin(\alpha + \gamma)}{\sin\alpha} \text{ für die Aufgabe:}$$

Aus zwei Winkeln und der einen Gegenseite die eingeschlossene Seite zu finden,

für $\sin(\alpha + \gamma)$ aufgelöst:

$$3.\ \sin(\alpha + \gamma) = \frac{b\,.\sin\alpha}{a} \text{ für die Aufgabe:}$$

Aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel den eingeschlossenen Winkel zu finden.

Zwar findet man unmittelbar hieraus Winkel $(\alpha + \gamma)$; da aber α gegeben ist, so erhält man γ durch Subtraction $(\alpha + \gamma) - \alpha = \gamma$,

für $tg\alpha$ aufgelöst giebt die Gleichung II. die Formel:

$$4.\ tg\,\alpha = \frac{a\,.\sin\gamma}{b - a \cos\gamma} \text{ für die Aufgabe:}$$

Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel einen anderen Winkel zu finden.

Für diese Aufgabe werden wir im nächsten Paragraphen eine bequemere logarithmische Formel finden, durch welche man mittelbar beide Winkel bestimmen kann. —

Bemerkung. Da die ersten drei Formeln logarithmisch sind, die vierte Formel aber im nächsten Paragraphen durch eine logarithmische ersetzt werden wird, so verschieben wir die Aufstellung und Ausrechnung von Aufgaben bis dahin.

§. 75.

Tangentenregel.

In jedem Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz wie die Tangente der halben Summe ihrer Gegenwinkel zur Tangente der halben Differenz derselben Winkel oder in Zeichen:

$$a + b : a - b = tg\, {}^1\!/_2\, (\alpha + \beta) : tg\, {}^1\!/_2\, (\alpha - \beta).$$

Nach der Sinusregel ist $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$.

Daher auch $a + b : a - b = \sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta$.

Da nun $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) \cos {}^1\!/_2 (\alpha - \beta)$

und $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cos {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) \sin {}^1\!/_2 (\alpha - \beta)$

so ist $\sin\alpha + \sin\beta : \sin\alpha - \sin\beta = tg\, {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) \,.\, ctg\, {}^1\!/_2 (\alpha - \beta)$

$$= \frac{tg\, {}^1\!/_2 (\alpha + \beta)}{tg\, {}^1\!/_2 (\alpha - \beta)}$$

oder $a + b : a - b = tg\, {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) : tg\, {}^1\!/_2 (\alpha - \beta)$.

Dieser Satz, den man auch kurz die Tangentenregel nennt, dient zur Lösung der Aufgabe:

Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die beiden anderen Winkel zu finden. Sind nämlich a, b und γ gegeben, so ist auch $\alpha + \beta$ und $\frac{\alpha + \beta}{2}$ gegeben. Daher sind in der Proportion $a + b : a - b = tg\, {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) : tg\, {}^1\!/_2 (\alpha - \beta)$ drei Glieder bekannt und das vierte Glied $tg\, {}^1\!/_2 (\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \,.\, tg\, {}^1\!/_2 (\alpha + \beta)$. Aus $tg\, {}^1\!/_2 (\alpha - \beta)$ findet man ${}^1\!/_2 (\alpha - \beta)$ und aus ${}^1\!/_2 (\alpha - \beta)$ und ${}^1\!/_2 (\alpha + \beta)$ nach einem einfachen Satze der Arithmetik α und β selbst.

Denn ist $a > b$ und $\alpha > \beta$, so ist $\alpha = {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) + {}^1\!/_2 (\alpha - \beta)$ und

$$\beta = {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) - {}^1\!/_2 (\alpha - \beta).$$

Beispiel: Ist $a = 409$, $b = 241$, $\gamma = 12^0\, 48'\, 4{,}5''$,

so ist $\frac{\alpha + \beta}{2} = 83^0\, 35'\, 57{,}75''$

$$\log tg\, {}^1\!/_2 (\alpha - \beta) = \log (a - b) + \log tg\, {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) - \log (a + b)$$

$$\begin{aligned} \log (a - b) &= 2{,}2253093 \\ \log tg\, {}^1\!/_2 (\alpha + \beta) &= 9{,}9500883 - 10 \\ \hline & 12{,}1753976 - 10 \\ \log (a + b) &= 2{,}8129134 \\ \log tg\, {}^1\!/_2 (\alpha - \beta) &= 9{,}3624842 - 10;\ {}^1\!/_2(\alpha - \beta) = 66^0\, 32'\, 16{,}4'' \end{aligned}$$

Da nun ${}^1\!/_2(\alpha + \beta) = 83^0 35' 57{,}75''$

so ist $\alpha = 150^0 8' 14{,}15''$

$\beta = 17^0 3' 41{,}35''$

und da $\gamma = 12^0\, 48'\, 4{,}5''$

so ist $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. —

§. 76.

Die Gleichung zwischen drei Seiten und einem Winkel zu suchen.

I. Erste Ableitung. Soll die Gleichung zwischen a, b, c und γ gesucht werden, so fälle man, wie in Fig. 14 und 15, aus B das Perpendikel BD. Bestimmt man nun hier BD^2 wie früher BD, erst aus dem Dreieck BDC und dann mit Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes auch aus Dreieck ABD, so erhält man mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen für beide Fälle:

$$a^2 \sin\gamma^2 = c^2 - (b - a \cos\gamma)^2 \text{ oder}$$

$$a^2 \sin\gamma^2 = c^2 - b^2 + 2\, ab \cos\gamma - a^2 \cos\gamma^2 \text{ oder durch}$$

Transposition $a^2 (\sin\gamma^2 + \cos\gamma^2) = c^2 - b^2 + 2\, ab \cos\gamma$ oder nach §. 39

$$a^2 = c^2 - b^2 + 2\, ab \cos\gamma.$$

Löset man diese Gleichung für c^2 auf, so erscheint sie unter der Form von $c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos\gamma$ als trigonometrischer Ausdruck des verallgemeinerten pythagoräischen Lehrsatzes und wird auch wohl kurz Carnot'scher Lehrsatz genannt, dem französischen Mathematiker, Kriegsminister u. s. w. Carnot zu Ehren.

Ist der Winkel $\gamma = R$, so ist $\cos\gamma = o$ und daher für diesen Fall $c^2 = a^2 + b^2$.

Ist der Winkel γ spitz, so ist $\cos\gamma$ positiv und daher für diesen Fall $c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos\gamma$.

Ist der Winkel γ stumpf, so ist $\cos\gamma$ negativ und daher für diesen Fall $c^2 = a^2 + b^2 + 2\, ab \cos\gamma$.

II. Andere Ableitung. Man zerlege durch Perpendikel aus den drei Winkelspitzen auf die Gegenseiten jede Seite des Dreiecks in zwei Abschnitte, bestimme diese Abschnitte durch die anliegenden Seiten und die Cosinus der anliegenden Winkel, so erhält man durch Addition oder Subtraction dieser beiden Ausdrücke, mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen, das Dreieck mag spitz-, stumpf- oder rechtwinklig sein, für die drei Seiten die drei Gleichungen:

$$a = b \, . \, \cos\gamma + c \, . \, \cos\beta$$
$$b = a \, . \, \cos\gamma + c \, . \, \cos\alpha$$
$$c = a \, . \, \cos\beta + b \, . \, \cos\alpha,$$

in denen jede Seite durch die beiden anliegenden Seiten und die Cosinus der anliegenden Winkel ausgedrückt ist. (Cosinussatz.) Multiplicirt man nun jede Gleichung mit ihrer linken Seite, so erhält man aus ihnen folgende drei Gleichungen:

$$a^2 = ab \cos\gamma + ac \cos\beta$$
$$b^2 = ab \cos\gamma + bc \cos\alpha$$
$$c^2 = ac \cos\beta + bc \cos\alpha.$$

Subtrahirt man jede dieser Gleichungen der Reihe nach von der Summe der beiden anderen, so erhält man aus ihnen:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2\,bc \cos\alpha$$
$$a^2 + c^2 - b^2 = 2\,ac \cos\beta$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = 2\,ab \cos\gamma$$

und löset man diese für die Subtrahenden der linken Seite auf, so erhält man die Gleichungen in der gewöhnlichen Form:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos\alpha \text{ u. s. w.}$$

§. 77.

Aufgaben und Formeln aus der Gleichung des vorigen Paragraphen.

Löset man die Gleichung des vorigen Paragraphen für die darin vorkommenden Größen auf, so erhält man folgende drei Formeln für die drei wesentlich verschiedenen Aufgaben, die in ihr enthalten sind.

1. $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,bc \cos\alpha}$

für die Aufgabe: Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu finden.

2. $$\begin{cases} b = c \, . \cos\alpha \pm \sqrt{c^2 \cos\alpha^2 + a^2 - c^2} = c \, . \cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 (1 - \cos\alpha^2)} \\ \qquad = c \, . \cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin\alpha^2} \\ \text{nach ähnlicher Umformung für } c = b \, . \cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin\alpha^2} \end{cases}$$

für die Aufgabe: Aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel die dritte Seite zu finden.

3. $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$

für die Aufgabe: Aus drei Seiten einen Winkel zu finden.

Erläuterung der Formeln.

Alle drei Formeln erscheinen in unlogarithmischer Gestalt, lassen sich aber, namentlich 1 und 3, leicht in logarithmische Formeln verwandeln oder nach Einführung eines Hilfswinkels durch logarithmische Formeln ersetzen, wie die folgenden Paragraphen zeigen werden. Formel zwei giebt, wie es auch in der Natur der Aufgabe liegt, als Lösungsformel einer gemischten quadratischen Gleichung zwei Werthe, indem sowohl das obere als das untere Vorzeichen vor dem Wurzelausdrucke genommen werden kann. Ist $a > c$, so darf nur das obere Vorzeichen genommen werden; ist dagegen $a < c$, so müssen beide Vorzeichen genommen werden, denn im ersten Falle ist das Dreieck vollkommen, im zweiten aber zweideutig bestimmt. Die Discussion der Gleichung und die Natur des Dreiecks zeigen genau an, in welchem Falle die Aufgabe unmöglich, in welchen Fällen dagegen eindeutig oder zweideutig ist. Für eine genauere Einsicht in die Natur und die Bedingungen der Aufgabe wird es gut sein, die Gleichung vollständig zu discutiren; dann wird sich auch deutlich zeigen, wie in dem allgemeinen algebraischen Ausdrucke alle verschiedenen speciellen geometrischen Constructionen nebst den für sie erforderlichen Bedingungen, enthalten sind.

§. 78.

Logarithmirung der im vorigen Paragraphen gewonnenen Formeln.

1. Logarithmirung der Formel $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos\alpha$.

Addirt und subtrahirt man auf der rechten Seite der Gleichung $2\,bc$, so erhält man $(b - c)^2 + 2\,bc - 2\,bc \cos\alpha = (b - c)^2 + 2\,bc\,(1 - \cos\alpha)$ $= (b - c)^2 + 2\,bc \, . \, 2 \sin{}^1\!/_2\,\alpha^2 = (b - c)^2 + 4\,bc \sin{}^1\!/_2\,\alpha^2$ $= (b - c)^2 \left(1 + \dfrac{4\,bc \sin{}^1\!/_2\,\alpha^2}{(b - c)^2}\right)$. Setzt man nun $\dfrac{4\,bc \sin{}^1\!/_2\,\alpha^2}{(b - c)^2}$

$= tg\,\varphi^2$ und $\frac{2 \sin {}^1/_2 \alpha}{b-c} \sqrt{bc} = tg\,\varphi$, so erhält man $a^2 = (b-c)^2$

$(1 + tg\,\varphi^2) = (b-c)^2 \sec \varphi^2 = \frac{(b-c)^2}{\cos \varphi^2}$ und

$$1.\ a = \frac{b-c}{\cos \varphi}, \text{ wenn } \frac{2 \sin {}^1/_2 \alpha}{b-c} \sqrt{bc} = tg\,\varphi \text{ ist.}$$

Ebenso hätte man für a folgende Formel erhalten können:

$$2.\ a = (b+c) \cos \varphi, \text{ wenn man } \frac{2 \cos {}^1/_2 \alpha}{b+c} \sqrt{bc} = \sin \varphi$$

gesetzt hätte und von $(b+c)^2 - 2\,bc\,(1 + \cos \alpha)$ ausgegangen wäre.

2. Zur Logarithmirung der Formel $b = c \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin \alpha^2}$.

Soll die vorgeschriebene Formel logarithmirt werden, so hat man ganz und gar das Verfahren für die Logarithmirung einer gemischten quadratischen Gleichung anzuwenden.

Da jedoch in der Gleichung der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen oder $\sqrt{a^2 - c^2 \sin \alpha^2} = \sqrt{(a + c \sin \alpha)\,(a - c \sin \alpha)}$ logarithmisch ist, so läßt sich die Formel auch leicht aus den Zahlen zweier logarithmischen Ausdrücke zusammensetzen.

3. Logarithmirung der Formel $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$.

Die vorstehende Formel läßt sich auf vier verschiedene Arten für $\sin {}^1/_2 \alpha$, $\cos {}^1/_2 \alpha$, $tg\,{}^1/_2 \alpha$ und $\sin \alpha$ sehr einfach logarithmiren.

1. Subtrahirt man nämlich auf beiden Seiten die Formel von 1, so hat man:

$$1 - \cos \alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\,bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2\,bc}$$
$$= \frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{2\,bc}.$$

Dividirt und radicirt man mit 2 auf beiden Seiten, so erhält man

$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)\ (a-b+c)}{2\,.\,2\,bc}}$. Setzt man nun $\frac{a+b+c}{2} = s$, so ist $\frac{a+b-c}{2} = s - c$; $\frac{a+c-b}{2} = s - b$; $\frac{b+c-a}{2} = s - a$. Da nun $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sin {}^1/_2 \alpha$ ist, so ist:

$$1.\ \sin {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{(s-b)\ (s-c)}{bc}}.$$

2. Addirt man ebenso auf beiden Seiten die Formel zu 1, so erhält man

$$1 + \cos \alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{2\,bc + b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$
$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2\,bc} = \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{2\,bc}.$$

Dividirt und radicirt man mit 2 auf beiden Seiten, so erhält man dieselbe Weise, wie in 1,

$$\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(b+c+a)\ (b+c-a)}{2\,.\,2\,bc}} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}.$$

Da nun $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \cos {}^1/_2 \alpha$,

so ist $2.\ \cos {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}$.

3. Dividirt man Gleichung 1 durch Gleichung 2, so hat man $\frac{\sin {}^1/_2 \alpha}{\cos {}^1/_2 \alpha} =$

$$3.\ tg\,{}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{(s-b)\ (s-c)}{s\,.\,(s-a)}}.$$

4. Multiplicirt man Gleichung 1 mit Gleichung 2, so erhält man

$$\sin {}^1/_2 \alpha\ .\ \cos {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{s\ .\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{b^2\,c^2}}.$$

Da nun $\sin {}^1/_2 \alpha\ .\ \cos {}^1/_2 \alpha = \frac{\sin \alpha}{2}$, so ist

$$4.\ \sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{s\ .\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}.$$

Nach der einen Formel läßt sich so bequem wie nach der andern rechnen. Um jedoch die Zweideutigkeit in Bezug auf den Sinus zu vermeiden, berechne man lieber $\sin {}^1/_2 \alpha$ als $\sin \alpha$. —

Beispiele: 1. für die Logarithmirung der ersten Formel $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \alpha}$.

Setzt man $\frac{2 \sin {}^1/_2 \alpha}{b-c} \sqrt{bc} = tg\,\varphi$, so ist $a = \frac{b-c}{\cos \varphi}$ oder ist $\log tg\,\varphi = \log 2 + \log \sin {}^1/_2 \alpha + {}^1/_2\ (\log b + \log c) - \log (b-c)$, so ist $\log a = \log (b-c) - \log \cos \varphi$.

Wenn $b = 360$, $c = 317$ und $\alpha = 103^0\ 41'\ 8''$ ist, so ist ${}^1/_2 \alpha = 51^0\ 50'\ 34''$ und $b - c = 43$.

$$\begin{aligned}
\text{Da nun } \log 2 &= 0{,}3010300 \\
\log \sin {}^1/_2\,\alpha &= 9{,}8955984 - 10 \\
{}^1/_2\,(\log b + \log c) &= 2{,}5286804 \\
&\overline{\quad 12{,}7253088 - 10} \\
-\log\,(b-c) &= 1{,}6334685 \\
\text{so ist } \log tg\,\varphi &= 11{,}0918403 - 10 \\
\text{und } \varphi &= 85^0\ 22'\ 21{,}4'' \\
\text{Da ferner } \log\,(b-c) &= 1{,}6334685 \\
\text{und } \log \cos\varphi &= 8{,}9067472 - 10 \\
\text{so ist } \log a &= 2{,}7267213 \\
\text{und } a &= 532{,}993 = 533.
\end{aligned}$$

2. Beispiel für die Logarithmirung der Formel $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$.

Ist $a = 1649$; $b = 1857$; $c = 1264$, so ist $s = 2385$; $s - a = 736$; $s - b = 528$; $s - c = 1121$, und nach der Tafel $\log a = 3{,}2172207$; $\log b = 3{,}2688119$; $\log c = 3{,}1017471$; $\log s = 3{,}3774884$; $\log\,(s-a) = 2{,}8668778$; $\log\,(s-b) = 2{,}7226339$; $\log\,(s-c) = 3{,}0496056$.

Da nun $\cos {}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\dfrac{s\,.\,(s-a)}{bc}}$, so ist

$$\begin{aligned}
\log\ .\ \cos {}^1/_2\,\alpha &= {}^1/_2\,(\log s + \log\,(s-a) - lg\,(bc)) \\
\log s &= 3{,}3774884 \\
lg\,(s-a) &= 2{,}8668778 \\
&\overline{\quad 6{,}2443662} \\
-\log\,(bc) &= 6{,}3705590 \\
&\overline{\quad (0{,}8738072 - 1)\ {}^1/_2} \\
lg \cos {}^1/_2\,\alpha &= 9{,}9369036 - 10;\ {}^1/_2\,\alpha = 30^0\ 8'\ 35''.
\end{aligned}$$

Da ferner $\sin {}^1/_2\,\beta = \sqrt{\dfrac{(s-a)\ (s-c)}{ac}}$

$$\begin{aligned}
\text{so ist } lg \sin {}^1/_2\,\beta &= {}^1/_2\,(lg\,(s-a) + lg\,(s-c) - lg\,(ac)) \\
lg\,(s-a) &= 2{,}8668778 \\
lg\,(s-c) &= 3{,}0496056 \\
&\overline{\quad 5{,}9164834} \\
-lg\,(ac) &= 6{,}3189678 \\
&\overline{\quad (0{,}5975156 - 1)\ {}^1/_2} \\
lg \sin {}^1/_2\,\beta &= 9{,}7987578 - 10;\ {}^1/_2\,\beta = 38^0\ 59'\ 16''.
\end{aligned}$$

Da endlich $tg\,{}^1/_2\,\gamma = \sqrt{\dfrac{(s-a)\ (s-b)}{s\,.\,(s-c)}}$, so ist

$$\begin{aligned}
lg\,tg\,{}^1/_2\,\gamma &= {}^1/_2\,(lg\,(s-a) + \log\,(s-b) - (lg\,s + lg\,(s-c))) \\
lg\,(s-a) &= 2{,}8668778 \\
lg\,(s-b) &= 2{,}7226339 \\
&\overline{\quad 5{,}5895117} \\
lg\,s &= 3{,}3774884 \\
lg\,(s-c) &= 3{,}0496056 \\
&\overline{\quad 6{,}4270940} \\
&\overline{\quad (0{,}1624177 - 1)\ {}^1/_2} \\
lg\,tg\,{}^1/_2\,\gamma &= 9{,}5812088 - 10;\ {}^1/_2\,\gamma = 20^0\ 52'\ 10''.
\end{aligned}$$

§. 79.

Berechnung des Flächeninhalts der Dreiecke.

Da durch die Bestimmungsstücke eines Dreiecks zugleich auch sein Inhalt gegeben ist, so erhalten wir für die Bestimmung des Inhalts ebenso viele verschiedene Aufgaben und Formeln, wie für die anderen fehlenden Stücke, und wenn in einer Aufgabe die fehlenden Stücke nicht ohne Zweideutigkeit bestimmt sind, so ist auch der Inhalt nicht ohne Zweideutigkeit bestimmt. Da der Flächeninhalt des Dreiecks dem halben Producte aus Grundlinie und Höhe gleich ist, unter den Bestimmungsstücken des Dreiecks aber nothwendig eine Seite sein muß, so kann man diese jedesmal als Grundlinie annehmen. Dann hat man nur noch die Höhe für sie durch die gegebenen Bestimmungsstücke auszudrücken, um die Formel für den Inhalt zu erhalten.

1. Inhaltsbestimmung aus drei Seiten.

Nimmt man eine Seite z. B. a als Grundlinie, so ist $J = \dfrac{a}{2}\,.\,h$.

Da nun $h = b\,.\,\sin\gamma = c\,.\,\sin\beta$, so ist $J = \dfrac{ab}{2}\,.\,\sin\gamma$. Da aber $\sin\gamma = \dfrac{2}{ab}\sqrt{s\,.\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, so ist

$$1.\ J = \frac{ab}{2}\,.\,\frac{2}{ab}\sqrt{s\,.\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} = \sqrt{s\,.\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

2. Inhaltsbestimmung aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Nimmt man a als Grundlinie an, wenn der Inhalt aus a, b und γ bestimmt werden soll, so ist $J = \dfrac{ah}{2}$; da nun $h = b\,\sin\gamma$ ist, so ist

2. $J = \frac{ab}{2} \sin\gamma$ d. h. der Inhalt ist dem halben Producte aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels gleich.

3. Inhaltsbestimmung aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel.

Nimmt man b als Grundlinie an, wenn der Inhalt aus a, b und α bestimmt werden soll, so ist $J = \frac{b}{2} . h$; da aber $h = c \sin\alpha$ und $c = b . \cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin\alpha^2}$, so ist

3. $J = \frac{1}{2} b . \sin\alpha \; (b \cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin\alpha^2})$.

4. Inhaltsbestimmung aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

Wenn der Inhalt aus a, β und γ bestimmt werden soll, so ist $J = \frac{a . h}{2}$; $h = b \sin\gamma$ und $b = \frac{a . \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$; daher 4. $J = \frac{a^2 \sin\beta . \sin\gamma}{2 \sin(\beta+\gamma)}$.

5. Inhaltsbestimmung aus einer Seite, dem Gegenwinkel und einem anliegenden Winkel.

Ist der Inhalt aus a, α und β zu bestimmen, so ist $J = \frac{ah}{2}$. Da nun $h = c . \sin\beta$ und $c = \frac{a . \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$, so ist 5. $J = \frac{a^2}{2} . \frac{\sin\beta . \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$.

Erläuterung zu den Formeln. Von diesen Formeln sind vier logarithmisch, die dritte dagegen unlogarithmisch. An der dritten Formel haftet außerdem die schon oben berührte Zweideutigkeit für die Bestimmung eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel. Am bequemsten und sichersten läßt sich nach den Formeln 1 und 2 rechnen, da sie dem Gedächtnisse sich am leichtesten einprägen und Verwechselungen von Linien oder Winkeln bei ihrer Anwendung nicht leicht denkbar sind, was bei den Formeln 4 und 5 sich leicht ereignet. —

§. 80.

Andeutungen über den kürzesten und sichersten Weg bei der Dreiecksberechnung.

Sollen aus den gegebenen Bestimmungsstücken sämmtliche fehlende Stücke und der Inhalt berechnet werden, so verfährt man bei den verschiedenen Hauptaufgaben am bequemsten auf folgende Weise:

1. Dreiecksberechnung aus drei Seiten.

Man berechne alle drei Winkel aus einer und derselben Formel aus §. 78, z. B. nach der Formel für $\sin \frac{1}{2}\alpha$, $\sin \frac{1}{2}\beta$, $\sin \frac{1}{2}\gamma$; darauf den Inhalt aus drei Seiten oder aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Dies Verfahren controlirt die Rechnung und sichert am besten vor Verwechselung der Formeln.

2. Dreiecksberechnung aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel.

Man berechne zuerst den andern Gegenwinkel nach der Sinusregel, hierauf den dritten Winkel durch Subtraction, die dritte Seite wieder nach der Sinusregel und den Inhalt aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Ueber die hier etwa vorkommende Zweideutigkeit vergleiche §. 79.

3. Dreiecksberechnung aus zwei Winkeln und einer Seite.

Man berechne erst den dritten Winkel durch Subtraction, die beiden anderen Seiten nach der Sinusregel und den Inhalt aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

4. Dreiecksberechnung aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Man berechne beide Winkel nach der Tangentenregel §. 75, die dritte Seite nach der Sinusregel und den Inhalt aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

§. 81.

Zusammenstellung der wichtigsten im zweiten Abschnitte gewonnenen Formeln.

1. $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.
2. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = d$.
3. $a = 2r \sin\alpha$.
4. $a = b . \cos\gamma + c . \cos\beta$.
5. $a + b : a - b = tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) : tg\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.
6. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$.
7. $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

$$8.\quad \sin {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

$$9.\quad \cos {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{s.(s-a)}{bc}}.$$

$$10.\quad tg\, {}^1/_2 \alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s.(s-a)}}.$$

$$11.\quad \sin \alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$12.\quad J = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dritter Abschnitt.

Geodätische Anwendungen der ebenen Trigonometrie.

§. 1.

Die Lehren der ebenen Trigonometrie finden die vielfachste Verwendung in den praktischen Wissenschaften, nirgend aber häufiger als in der Geodäsie, sowohl der niederen, der Feldmeßkunst, als auch der höheren, der Ländervermessung. Die Hauptaufgabe der Geodäsie besteht in der Bestimmung der Lage von Punkten und ihrer gegenseitigen Entfernungen auf oder unter der Erdoberfläche, wobei letztere als horizontale Ebene vorausgesetzt wird, so lange die horizontalen Entfernungen nicht beträchtlich sind. Die elementare Geometrie kann zwar durch ihre Hilfsmittel, durch die Anwendung der Congruenz und Aehnlichkeitssätze, sowie durch den pythagoräischen Lehrsatz die wichtigsten Aufgaben der niederen Geodäsie lösen, wenngleich nur unvollkommen und ohne große Genauigkeit; für größere Entfernungen und schärfere Anforderungen reicht sie jedoch mit ihren Messungen, Hilfsmitteln, Instrumenten und Rechnungen nicht aus, sondern verlangt die Verwendung besserer Winkelinstrumente und der trigonometrischen Rechnung.

§. 2.

Die Grundaufgabe der Geodäsie, die Bestimmung von Punkten und ihren gegenseitigen Entfernungen zerfällt in drei Hauptaufgaben:

a. in die Bestimmung von Punkten in einer horizontalen Ebene,
b. in die Bestimmung von Punkten in einer vertikalen Ebene,
c. in die Berechnung von größeren Landestheilen oder ganzen Ländern.

§. 3.

Kann die Bestimmung der Lage zweier Punkte nicht durch unmittelbare Messung gefunden werden, so müssen noch Hilfspunkte gesucht werden, durch welche in Verbindung mit den gesuchten Punkten Dreiecke gebildet werden, aus deren Berechnung die zu bestimmenden Lagen und Entfernungen sich ergeben. —

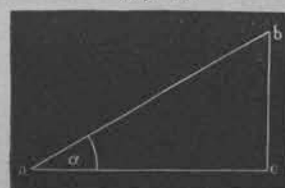
A. Bestimmung von Punkten und Entfernungen in einer horizontalen Ebene.

§. 4.

Die Horizontalprojection einer geneigten Linie zu bestimmen.

Soll aus der geneigten Linie ab und dem Elevationswinkel α ihre Horizontalprojection ac bestimmt werden, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck abc $ac = ab \,.\, \cos \alpha$.

Fig. 16.



Beispiel: Wie groß ist die Projection der unter einem Winkel von $4^0\ 5'$ gegen den Horizont geneigten Linie ab, welche 24000′ oder eine deutsche Meile lang ist?

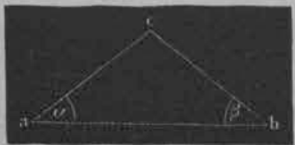
Bemerkung. Die Erläuterung folgender Begriffe aus der Stereometrie ist an dieser Stelle einzuschieben: Horizontal- und Vertical-Ebene; Neigungswinkel; Elevations- und Depressionswinkel; Meridiane; Parallelkreis und Azimuth in Bezug auf einen bestimmten Meridian oder eine bestimmte Standlinie.

§. 5.

Aus einer Standlinie und den ihr anliegenden Winkeln die Lage eines dritten Punktes zu bestimmen, der mit den beiden anderen Punkten in einer horizontalen Ebene liegt.

Soll die Lage von c aus der Standlinie ab und den an ihr liegenden Winkeln α und β bestimmt werden, so ist im Dreieck abc:

Fig. 17.



$$ac = \frac{ab \,.\, \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

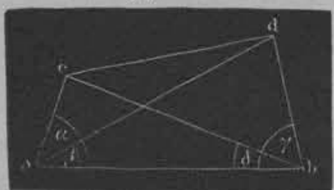
$$cb = \frac{ab \,.\, \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

§. 6.

Aus einer Standlinie und den ihr anliegenden Winkeln die Lage und Entfernung zweier anderer Punkte zu bestimmen, die mit der Standlinie in derselben Ebene liegen.

Soll aus der Standlinie ab, den ihr anliegenden Winkeln α, β, γ und δ ac, bc, ad und db bestimmt werden, so ist im Dreiecke abc und dem Dreiecke abd:

Fig. 18.



$$1.\quad ac = \frac{ab \,.\, \sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}$$

$$2.\quad bc = \frac{ab \,.\, \sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}$$

$$3.\quad bd = \frac{ab \,.\, \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$$

$$4.\quad ad = \frac{ab \,.\, \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Endlich ist im Dreieck acd oder bcd:

$$5.\quad cd = \sqrt{ac^2 + ad^2 - 2\,ac\,.\,ad\,.\,\cos(\alpha-\beta)}$$
$$= \sqrt{bd^2 + bc^2 - 2\,bc\,.\,bd\,.\,\cos(\gamma-\delta)}.$$

Bemerkung. Will man sich lieber einer logarithmischen Formel zur Rechnung bedienen, so kann man z. B. in dem Dreiecke acd nach der Tangentenregel erst die Winkel acd und adc berechnen und dann mit ihrer Hilfe cd nach der Sinusregel suchen.

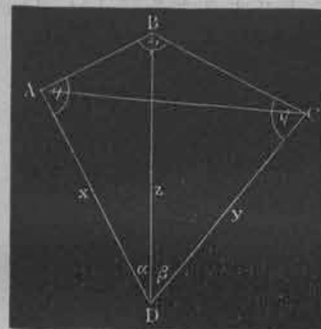
Beispiel: Wenn $ab = 500$; $\alpha = 110^0\,20'\,3''$; $\beta = 23^0\,4'\,2''$; $\gamma = 98^0\,2'\,3''$ und $\delta = 15^0\,4'\,3''$, so ist $ad = 578{,}2$; $ac = 159{,}46$; $cd = 592{,}41$.

§. 7.

Aus der bekannten gegenseitigen Lage von drei Punkten die Lage eines vierten Punktes zu bestimmen, von dem aus jene drei Punkte gesehen werden können.

Soll aus der bekannten Lage der Punkte A, B und C die Lage des vierten Punktes D bestimmt werden, wenn außer $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$ auch die Winkel α und β bei D gegeben sind, so hat man in dem Dreiecke ABC außer seinen drei Seiten auch seine drei Winkel und namentlich den Winkel γ. Bezeichnet man nun in dem Vierecke $ABCD$ die unbekannten Winkel bei A und C mit φ und ψ, sowie die gesuchten Seiten AD, BD und CD mit x, z, y, so ist im Viereck $ABCD$:

Fig. 19.



$$\varphi + \psi = 360 - (\alpha + \beta + \gamma) \text{ oder}$$

$$1.\quad \frac{\varphi+\psi}{2} = 180 - {}^1\!/_2\,(\alpha+\beta+\gamma).$$

In den Dreiecken ABD und BCD ist:

$$2.\quad x = \frac{a\,.\,\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}. \qquad 3.\quad y = \frac{b\,.\,\sin(\beta+\psi)}{\sin\beta}.$$

$$4.\quad z = \frac{a\,.\,\sin\varphi}{\sin\alpha}. \qquad 5.\quad z = \frac{b\,.\,\sin\psi}{\sin\beta}.$$

Daher $\dfrac{a\,.\,\sin\varphi}{\sin\alpha} = \dfrac{b\,.\,\sin\psi}{\sin\beta}$ oder 6. $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \dfrac{b\,.\,\sin\alpha}{a\,.\,\sin\beta}$.

Setzt man nun den Ausdruck $\dfrac{b\,.\,\sin\alpha}{a\,.\,\sin\beta}$, in dem nur bekannte Größen vorkommen $= tg\,\delta$, so ist:

$$7.\quad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = tg\,\delta.$$

Wird in der Gleichung 7. auf beiden Seiten 1 subtrahirt und addirt und darauf die erste Gleichung durch die zweite dividirt, so erhält man:

$$8.\quad \frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{tg\,\delta - 1}{tg\,\delta + 1}$$

und aus ihr mit Anwendung der goniometrischen Formeln 36 und 48:

$$9.\quad \frac{tg\,{}^1\!/_2\,(\varphi-\psi)}{tg\,{}^1\!/_2\,(\varphi+\psi)} = tg\,(\delta - 45^0).$$

Da nun nach Gleichung 1. $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 180 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$, so ist
$tg\ \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = tg\,(180 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma))\ tg\,(\delta - 45^0)$ oder
10. $tg\ \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = tg\ \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)\ .\ tg\,(45^0 - \delta)$.

Aus den Werthen für $\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$ und $\frac{1}{2}(\varphi + \psi)$, die sich aus den Gleichungen 10 und 1 ergeben, findet man φ und ψ und aus ihnen endlich mit Hilfe der Gleichungen 2, 3, 4 oder 5 x, y und z.

Beispiel: Wenn $a = 312$; $b = 520$; $\gamma = 65^0\,27'$; $\alpha = 23^0\,25'$ und $\beta = 32^0\,52'$ gegeben wird, so ist: 1. $\alpha + \beta + \gamma = 121^0\,44'$ und $\varphi + \psi = 360^0 - 121^0\,44' = 238^0\,16$; $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 119^0\,8'$; $\delta = 50^0\,40'\,17''$; $\varphi = 109^0\,1'\,49{,}6''$; $\psi = 129^0\,14'\,10{,}5''$; $x = 579{,}31$; $z = 742{,}17$; $y = 294{,}46$.

Bei der Aufstellung und Durchführung der Rechnungen ist genau auf die Vorzeichen der trigonometrischen Functionen zu achten, um nicht statt spitzer, stumpfe Winkel und umgekehrt zu erhalten.

Literarische Notizen über das Pothenot'sche Problem, unter welchem Namen gewöhnlich diese Aufgabe in den Büchern aufgeführt wird, findet man in van Swindens Elementen der Geometrie, herausgegeben von Jacobi.

Discussion der Aufgabe.

Die verschiedenen Fälle, welche bei dieser Aufgabe stattfinden können, werden einestheils durch die Lage der drei gegebenen Punkte gegen einander und anderentheils durch die Lage des vierten Punktes gegen sie bestimmt.

In Bezug auf die Lage der drei gegebenen Punkte sind zwei Fälle zu unterscheiden:

A. Die drei Punkte liegen in gerader Linie,

B. Die drei Punkte bilden ein Dreieck.

A. Liegen die drei Punkte in der geraden Linie ABC, so kann der vierte gesuchte Punkt D nur zwei verschiedene Lagen zu den drei Punkten A, B und C haben; er liegt nämlich mit ihnen:

a. in derselben Linie,

b. nicht in derselben Linie.

a. Liegt er mit ihnen in derselben Linie entweder zwischen A und B oder zwischen B und C oder in ihrer Verlängerung entweder über A oder über C hinaus, so werden die Winkel α, β, φ, ψ entweder $= 0$ oder $= 180$ und die Werthe für x, y, z dadurch unbestimmt.

b. Liegt dagegen D außerhalb der Linie ABC, so ist $ABC = \gamma = 180^0$; $\varphi + \psi = 180^0 - (\alpha + \beta)$ oder $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = 90 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$;

$tg\ \frac{1}{2}(\varphi + \psi) = cotg\ \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ und $tg\ \frac{1}{2}(\varphi - \psi) = cotg\ \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ $tg\,(\delta - 45^0)$.

B. Liegen die drei Punkte nicht in gerader Linie, so kann der vierte Punkt D

a. in einer Seite des Dreiecks ABC liegen oder in deren Verlängerungen,

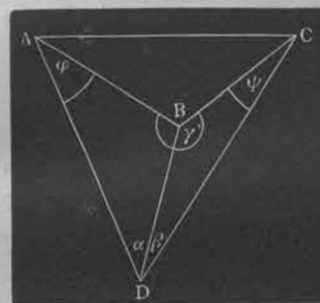
b. außerhalb des Dreiecks,

c. innerhalb des Dreiecks.

a. Liegt der Punkt D in einer Seite des Dreiecks ABC z. B. in AC oder deren Verlängerung, so sind α und β entweder supplementare oder identische Winkel in φ und ψ, sowie x, y, z sehr leicht aus den Dreiecken ABD und BCD zu bestimmen.

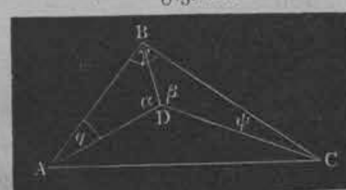
b. Liegt der Punkt D außerhalb des Dreiecks ABC, so kann er entweder vor dem berechneten concaven Winkel γ oder vor seinem convexen Supplementwinkel γ' liegen. Hat er die erste Lage, so erhält man φ, ψ, x, y, z durch die eben abgeleiteten Formeln, wenn $\alpha + \beta + \gamma$ ungleich $\varphi + \psi$ oder ungleich $2R$ ist, oder mit anderen Worten, wenn A, B, C, D nicht in der Peripherie eines und desselben Kreises liegen. Hat er dagegen die zweite Lage vor dem convexen Winkel γ', wie in beistehender Figur, so muß in den Formeln statt γ sein convexer Supplementwinkel mit Berücksichtigung der Vorzeichen seiner Functionen in Rechnung gebracht werden.

Fig. 20.



c. Liegt endlich D innerhalb des Dreiecks ABC, wie in Figur 21, so ist $\alpha + \beta$ jedenfalls convex, während $\alpha + \beta$ bei der Lage in b. unbedingt concav war. Die Formeln für φ, ψ, x, y, z sind die wie oben abgeleiteten.

Fig. 21.



Unbestimmt bleibt demnach die Aufgabe in den beiden Fällen, wenn D a, in der geraden Linie ABC liegt und b, wenn es mit ABC auf der Peripherie eines und desselben Kreises liegt, oder wenn $\alpha + \beta + \gamma = \varphi + \psi = 2R$ ist.

§. 8.

Die Entfernung eines runden Gegenstandes (Thurmes, Ballons) zu bestimmen, der bei einem wirklichen Durchmesser von d Fuß mit einem scheinbaren Durchmesser (Sehwinkel) von α Secunden erscheint.

Bezeichnet man die Entfernung mit x, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke, dessen beide Katheten durch die gesuchte Entfernung und den halben Durchmesser gebildet werden und dessen schiefer Winkel $= \frac{1}{2}\alpha$ ist:

$$x = \tfrac{1}{2} d \,.\, cotg \,.\, \tfrac{1}{2} x.$$

Wie wird der wirkliche Durchmesser eines runden Gegenstandes aus seinem scheinbaren Durchmesser und seiner Entfernung gefunden? In welcher Entfernung wird ein Gegenstand von d Fuß Durchmesser dem unbewaffneten Auge entschwinden, vorausgesetzt, daß der kleinste Sehwinkel α bei dunkelfarbigen Gegenständen 40″ und bei hellfarbigen von der Sonne beschienenen Gegenständen 30″ beträgt?

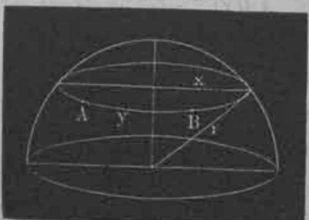
Beispiel: Wie weit ist ein dunkelfarbiger und wie weit ein blanker, hellerleuchteter Thurmknopf von 6′ Durchmesser sichtbar? In welcher Entfernung treten dem Auge die Bäume einer Chausseeallee zusammen, die einen Abstand von 30′ haben?

§. 9.

Bestimmung der Länge eines Breitenkreisbogens zwischen zwei Punkten A und B gleicher geographischer Breite (α) und einer Längendifferenz von δ^0, wenn der Radius (r) der Erdkugel 860 Meilen ist.

Bezeichnet man den Radius des Parallelkreises mit x und die Bogenlänge mit y, so ist aus beistehender Figur leicht ersichtlich, daß $x = r \,.\, cos\,\alpha$

Fig. 22.



$$\text{und } y = \frac{x \,.\, \pi}{180} \,.\, \delta = \frac{r \,.\, \pi \,.\, cos\,\alpha}{180} \,.\, \delta$$

$$= \frac{r\pi \,.\, \delta}{180} \,.\, cos\,\alpha.$$

Bemerkung. Die Länge des Parallelkreisbogens AB drückt jedoch nicht die sphärische Entfernung der beiden Punkte A und B auf der Erdoberfläche aus, denn diese wird nach den Lehren der Stereometrie durch den größesten Kreisbogen zwischen den Punkten A und B gemessen.

B. Bestimmung von Punkten und Entfernungen in einer vertikalen Ebene (Höhenmessung).

Bei der trigonometrischen Höhenmessung aus einer Standlinie sowie den nöthigen Horizontal- und Elevations- oder Depressionswinkeln kommen besonders folgende Aufgaben in Betracht.

§. 10.

Die Höhe eines Punktes zu bestimmen, wenn die Standlinie horizontal liegt und bis zum Fußpunkt der Höhe gemessen ist.

Ist x die gesuchte Höhe, a die gemessene Entfernung und α der gemessene Elevationswinkel, so ist:

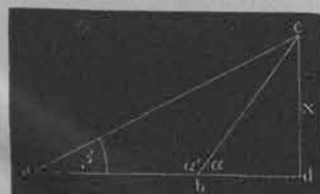
$$x = a \,.\, tg\,\alpha.$$

§. 11.

Die Höhe eines Punktes zu bestimmen, wenn die Standlinie horizontal liegt, zwar nicht bis zum Fußpunkt der Höhe reicht, aber mit der Höhe in einer vertikalen Ebene liegt.

Ist die Standlinie $ab = a$ gemessen, sowie die beiden Elevationswinkel α und β, so ist in dem Dreieck abc, wenn man den Supplementwinkel zu α mit α' bezeichnet,

Fig. 23.



$$bc = \frac{ab \,.\, sin\,\beta}{sin\,(\alpha' + \beta)} = \frac{a \,.\, sin\,\beta}{sin\,(\alpha' + \beta)}$$

und im Dreieck bcd:

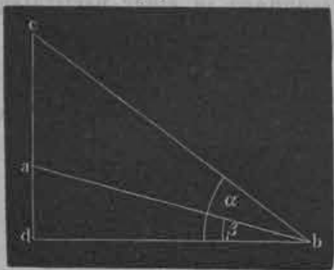
$$cd = x = bc \,.\, sin\,\alpha = \frac{a \,.\, sin\,\alpha \,.\, sin\,\beta}{sin\,(\alpha' + \beta)}.$$

§. 12.

Eine Höhe zu bestimmen, wenn die Standlinie nicht horizontal liegt, aber bis zum Fußpunkt reicht.

Ist in der Figur ab, α und β gegeben, so ist im Dreieck adb:

Fig. 24.



1. $ad = a \,.\, \sin\beta.$
2. $db = a \,.\, \cos\beta$

und im Dreieck abc:

3. $dc = db \,.\, tg\,\alpha = a \,.\, tg\,\alpha \,.\, \cos\beta$

daher 4. $x = cd - ad$

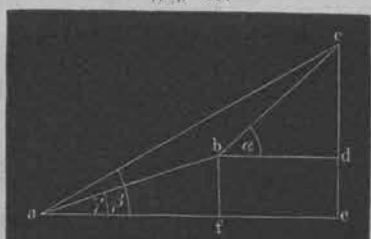
$$= a\, tg\,\alpha \,.\, \cos\beta - a \,.\, \sin\beta$$
$$= a\,(tg\,\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\beta)$$
$$= a\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \,.\, \cos\beta - \sin\beta\right)$$
$$= a\,\frac{(\sin\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\beta \,.\, \cos\alpha)}{\cos\alpha}$$
$$= \frac{a\, \sin\,(\alpha - \beta)}{\cos\alpha}.$$

§. 13.

Eine Höhe zu bestimmen, wenn die Standlinie nicht bis zum Fußpunkte reicht, nicht horizontal liegt, aber mit der Höhe in einer vertikalen Ebene.

Sind in beistehender Figur außer der Standlinie ab auch noch die Elevationswinkel α, β, γ gemessen, so ist im Dreieck abc:

Fig. 25.



1. Winkel $bac = \beta - \gamma$.
2. " $acb = dca - dcb = 90 - \beta - (90 - \alpha) = \alpha - \beta.$
3. " $abc = 180 - (cab + bca)$

$$= 180 - [(\beta - \gamma) + (\alpha - \beta)]$$
$$= 180 - (\alpha - \gamma).$$

4. " $ac = \dfrac{ab \,.\, \sin\,(180 - (\alpha - \gamma))}{\sin\,(\alpha - \beta)} = \dfrac{a \,.\, \sin\,(\alpha - \gamma)}{\sin\,(\alpha - \beta)}.$

Da nun im Dreieck ace $x = ce = ac \,.\, \sin\beta$ ist, so erhält man für x nach Substitution des Werthes für ac aus 4:

$$x = \frac{a \,.\, \sin\,(\alpha - \gamma')}{\sin\,(\alpha - \beta)} \,.\, \sin\beta.$$

Wollte man nur die Höhe cd bestimmen, so ist:

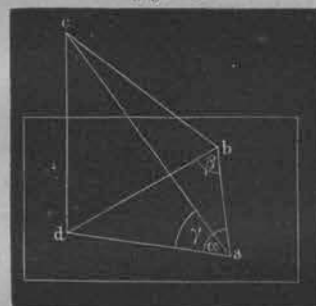
$$cd = x - de = x - bf = x - a \,.\, \sin\gamma'$$
$$= \frac{a \,.\, \sin\,(\alpha - \gamma)}{\sin\,(\alpha - \beta)} \,.\, \sin\beta - a \,.\, \sin\gamma.$$

§. 14.

Eine Höhe zu bestimmen, wenn die Standlinie zwar horizontal liegt, aber mit der Höhe nicht in derselben vertikalen Ebene.

Sind im Dreieck abd außer der Standlinie ab auch noch die horizontalen Winkel α und β gemessen, sowie am Punkte a der Elevationswinkel $cad = \gamma$, so ist im Dreieck abd:

Fig. 26.



$$ad = \frac{a \,.\, \sin\beta}{\sin\,(\alpha + \beta)}$$

und in dem rechtwinkligen Dreiecke acd:

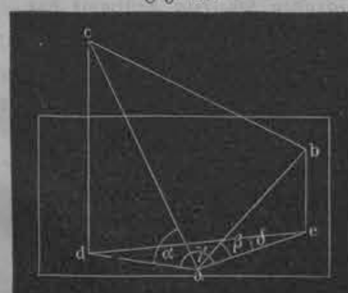
$$cd = x = ad \,.\, tg\,\gamma = \frac{a \,.\, \sin\beta}{\sin\,(\alpha + \beta)} \,.\, tg\,\gamma.$$

§. 15.

Eine Höhe zu bestimmen, wenn die Standlinie nicht horizontal liegt und auch nicht in derselben vertikalen Ebene mit der Höhe.

Liegt die Standlinie ab nicht horizontal und mit cd nicht in derselben vertikalen Ebene, so messe man vom Punkte a die beiden Elevationswinkel $cad = \alpha$ und $bae = \beta$ und den horizontalen Winkel $dae = \gamma$, am Punkte b aber den horizontalen Winkel $dea = \delta$.

Fig. 27.



Dann ist im rechtwinkligen Dreieck abe: $ae = a \,.\, \cos\beta$ gleich der in der vorigen Aufgabe gegebenen horizontalen Standlinie.

Da nun nach §. 14: $cd = x = \frac{ae \cdot \sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)} \cdot tg\,\alpha$

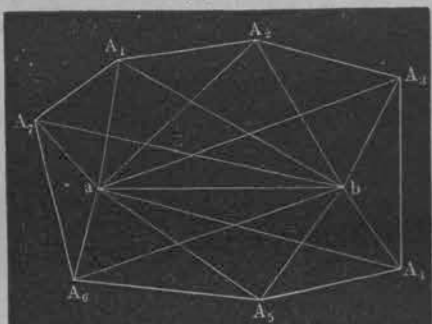
so ist $x = \frac{a \cdot \cos\beta \cdot \sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)} \cdot tg\,\alpha$.

C. Berechnung größerer Landstriche und ganzer Länder.

§. 16.

Soll die Fläche eines größeren Landstrichs $A_1\ A_2\ A_3$ aus einer Standlinie ab und den an ihr gemessenen Winkeln $A_1 ab$, $A_2 ab \ldots A_1 ba$, $A_2 ba$, $A_3 ba \ldots$ oder aus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \beta_1, \beta_2, \ldots$ berechnet werden,

Fig. 28.



so bestimme man z. B. den Flächeninhalt der Dreiecke $A_1\ A_2\ a$, $A_2\ A_3\ a$, $A_3\ A_4\ a$, $A_4\ A_5\ a$, ... aus den Strahlen aA_1, aA_2, aA_3 rc. und den von ihnen eingeschlossenen Winkeln, nachdem man die einzelnen Winkel aus den gemessenen Winkeln an der Standlinie und die sie einschließenden Strahlen aus den an der Standlinie ab liegenden Dreiecken $ab\,A_1$, $ab\,A_2$, $ab\,A_3$ .... aus einer Seite und zwei anliegenden Winkeln bestimmt hat.

Schlußbemerkung. Die bei der Winkelmessung anzuwendenden Vorsichtsmaßregeln mehrfacher Messungen und die daraus sich ergebenden Correctionen der gemessenen Winkel, sowie bei Elevationswinkeln die Größe der Abweichung des scheinbaren Horizontes vom wahren und die bei Berücksichtigung der Strahlenberechnung sich aufdringenden Correctionen lehrt im Einzelnen die höhere Geodäsie kennen. —

Anhang.

Uebungsaufgaben

zur Berechnung von Dreiecken, zu deren Bestimmung außer einzelnen Seiten und Winkeln, Seiten- und Winkelaggregate, Höhen, Transversalen, Radien der ein- und umschriebenen Kreise gegeben sind.

A. Berechnung rechtwinkliger Dreiecke.

Aufgabe 1. Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus einem schiefen Winkel (α) und der Summe der Katheten ($a + b = s$),

Auflösung. Werden beide Katheten durch die Hypotenuse und den gegebenen Winkel ausgedrückt, so ist:

$$a = c \cdot \sin\alpha$$
$$b = c \cdot \cos\alpha$$
$$\text{Daher } s = a + b = c\,(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Aus ihr erhält man:

1. $c = \frac{s}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{s}{\cos(\alpha - 45^0)\sqrt{2}}$ (§. 39, 32).

2. $a = c \cdot \sin\alpha = \frac{s \cdot \sin\alpha}{\cos(\alpha - 45^0)\sqrt{2}}$.

3. $b = c \cdot \cos\alpha = \frac{s \cdot \cos\alpha}{\cos(\alpha - 45^0)\sqrt{2}}$.

4. $\triangle = {}^1\!/_2\, ab = \frac{s^2 \cdot \sin 2\alpha}{8 \cdot \cos(\alpha - 45^0)^2}$.

Aufgabe 2. Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus einem schiefen Winkel (α) und der Differenz ($a - b = d$) der Katheten.

Auflösung: Durch eine ähnliche Ableitung wie in der vorigen Aufgabe findet man:

1. $c = \frac{d}{\sin(\alpha - 45)\sqrt{2}}$ (§. 39, 33).

2. $a = \frac{d \,.\, \sin\alpha}{\sin(\alpha - 45)\sqrt{2}}.$

3. $b = \frac{d \,.\, \cos\alpha}{\sin(\alpha - 45)\sqrt{2}}.$

4. $\triangle = \frac{d^2 \,.\, \sin 2\alpha}{8 \,.\, \sin(\alpha - 45)^2}.$

Aufgabe 3. Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus einem schiefen Winkel (α) und der Summe aus anliegender Kathete und Hypotenuse ($b + c = s$).

Auflösung: Drückt man die Kathete b durch Hypotenuse und den gegebenen Winkel α aus, so ist:

$$b = c \,.\, \cos\alpha.$$

Da nun $c = c$

so ist $b + c = s = c\,(1 + \cos\alpha)$.

Aus ihr erhält man:

1. $c = \frac{s}{1 + \cos\alpha} = \frac{s}{2 \,.\, \cos{}^1/_2\alpha^2}$ (§. 39, 30).

2. $a = c \,.\, \sin\alpha = \frac{s \,.\, \sin\alpha}{2 \,.\, \cos{}^1/_2\alpha^2} = s \,.\, tg\frac{\alpha}{2}.$

3. $b = \frac{s \,.\, \cos\alpha}{2 \,.\, \cos{}^1/_2\alpha^2} = s \,.\, \cot\alpha \,.\, tg\frac{\alpha}{2}.$

4. $\triangle = {}^1/_2\, a \,.\, b = \frac{s^2 \,.\, \sin 2\alpha}{16 \,.\, \cos{}^1/_2\alpha^4} = {}^1/_2\, s^2 \,.\, tg\frac{\alpha^2}{2} \,.\, \cot\alpha.$

Aufgabe 4. Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus einem schiefen Winkel (α) und der Differenz aus der anliegenden Kathete und der Hypotenuse ($c - b = d$).

Auflösung: Durch eine ähnliche Ableitung wie in der vorigen Aufgabe findet man:

1. $c = \frac{d}{2 \,.\, \sin{}^1/_2\alpha^2}$ (§. 39, 25).

2. $a = d \,.\, \cot{}^1/_2\alpha.$

3. $b = \frac{d \,.\, \cos\alpha}{2 \,.\, \sin{}^1/_2\alpha^2} = d \,.\, \cot{}^1/_2\alpha \,.\, \cot\alpha.$

4. $\triangle = \frac{d^2 \,.\, \sin 2\alpha}{16 \,.\, \sin{}^1/_2\alpha^4} = {}^1/_2\, d^2 \,.\, \cot{}^1/_2\alpha^2 \,.\, \cot\alpha.$

Aufgabe 5. Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus einem schiefen Winkel (α) und der Summe der drei Seiten ($a + b + c = s$).

Auflösung: Drückt man, wie in den vorigen Aufgaben, die Katheten durch die Hypotenuse und den gegebenen Winkel aus, so erhält man:

$$a = c \,.\, \sin\alpha$$
$$b = c \,.\, \cos\alpha$$
$$c = c$$

Daher $a + b + c = s = c\,(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)$.

Aus ihr erhält man:

1. $c = \frac{s}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$

$= \frac{s}{2 \,.\, \cos{}^1/_2\alpha^2 + 2\sin{}^1/_2\alpha \,.\, \cos{}^1/_2\alpha}$ (§. 39, 30 u. 25)

$= \frac{s}{2\cos{}^1/_2\alpha\,(\cos{}^1/_2\alpha + \sin{}^1/_2\alpha)}$

$= \frac{s}{2 \,.\, \cos{}^1/_2\alpha \,.\, \cos(45 - {}^1/_2\alpha)\sqrt{2}}$ (§. 39, 32).

2. $a = c \,.\, \sin\alpha = \frac{s \,.\, \sin{}^1/_2\alpha.}{\cos(45 - {}^1/_2\alpha)\sqrt{2}.}$

3. $b = c \,.\, \cos\alpha = \frac{s \,.\, \cos\alpha}{2 \,.\, \cos{}^1/_2\alpha \,.\, \cos(45 - {}^1/_2\alpha)\sqrt{2}.}$

4. $\triangle = {}^1/_2\, ab = \frac{s^2 \,.\, \sin 2\alpha}{32 \,.\, \cos{}^1/_2\alpha^2 \,.\, \cos(45 - {}^1/_2\alpha)^2}.$

Aufgabe 6. Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus einem schiefen Winkel (α) und der Differenz zwischen der Kathetensumme und der Hypotenuse ($a + b - c = d$).

Auflösung: Zur Berechnung erhält man:

$$1. \quad c = \frac{d}{2 \cdot \sin {}^1/_2\, \alpha \cdot \sin (45 - {}^1/_3\, \alpha) \sqrt{2}}.$$

$$2. \quad a = \frac{d \cdot \cos {}^1/_2\, \alpha}{\sin (45 - {}^1/_2\, \alpha) \sqrt{2}}.$$

$$3. \quad b = \frac{d \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \sin {}^1/_2\, \alpha \cdot \sin (45 - {}^1/_2\, \alpha) \sqrt{2}}.$$

$$4. \quad \triangle = \frac{d^2 \cdot \sin 2\alpha}{32 \cdot \sin {}^1/_2\, \alpha^2 \cdot \sin (45 - {}^1/_2\, \alpha)^2}.$$

Aufgabe 7. Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Hypotenuse (c) und der Summe beider Katheten ($a + b = s$).

Auflösung: Da $a^2 + b^2 = c^2$
und $b = s - a$
so ist $a^2 + (s - a)^2 = c^2$.

Aus ihr erhält man nach einigen leichten Umformungen:

$$1. \quad a = \frac{s \pm \sqrt{2c^2 - s^2}}{2}$$

$$\text{und } 2. \quad b = s - a = s - \frac{s \pm \sqrt{2c^2 - s^2}}{2} = \frac{s \pm \sqrt{2c^2 - s^2}}{2}.$$

Daher sind die beiden zusammengehörigen Werthe für a und b:

$$a = \frac{s + \sqrt{2c^2 - s^2}}{2}$$

$$b = \frac{s - \sqrt{2c^2 - s^2}}{2}.$$

$$3. \quad \triangle = {}^1/_2 \cdot ab = {}^1/_2 \cdot \frac{s + \sqrt{2c^2 - s^2}}{2} \cdot \frac{s - \sqrt{2c^2 - s^2}}{2}$$
$$= {}^1/_4\, (s + c)\, (s - c).$$

Die Winkel α und β können entweder aus der Hypotenuse und der Kathete vermittelst des Sinus oder Cosinus oder aus den beiden Katheten vermittelst der Tangente oder Cotangente bestimmt werden. Beide Ausdrucksweisen geben unlogarithmische Werthe. Einen logarithmischen Ausdruck für $\alpha - 45$ oder $\alpha + 45$ erhält man auf folgende Weise, wenn man beide Katheten durch die Hypotenuse und den gegebenen Winkel ausdrückt. Auf diese Weise erhält man:

$$s = c \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) = c \cdot \cos (\alpha - 45) \sqrt{2}$$
$$= c \cdot \sin (\alpha + 45) \sqrt{2}.$$

Daraus folgt $\cos (\alpha - 45) = \sin (\alpha + 45) = \dfrac{s}{c \sqrt{2}} = \dfrac{s \cdot \sqrt{2}}{2c}$.

Aufgabe 8. Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Hypotenuse (c) und der Differenz beider Katheten ($a - b = d$).

Auflösung: Durch eine ähnliche Ableitung erhält man Formeln, die den Formeln der vorigen Aufgabe analog sind.

Aufgabe 9. Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus den durch die Höhe gebildeten Abschnitten (c_a und c_b) der Hypotenuse.

Auflösung: Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist:

$$1. \quad a = \sqrt{c_a \cdot (c_a + c_b)}.$$

$$2. \quad b = \sqrt{c_b \cdot (c_a + c_b)}.$$

$$3. \quad \triangle = {}^1/_2 \cdot ab = {}^1/_2 \cdot (c_a + c_b) \sqrt{c_a \cdot c_b}$$

$$4. \quad tg\alpha = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{c_a}{c_b}}.$$

Aufgabe 10. Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Hypotenuse (c) und der Differenz ihrer Höhenabschnitte ($c_a - c_b = d$).

Auflösung: Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist:

$$a^2 = c_a \cdot c$$
$$b^2 = c_b \cdot c$$
$$\text{daher } a^2 - b^2 = c\,(c_a - c_b) = dc.$$
$$\text{Da aber zugleich } a^2 + b^2 = c^2$$
$$\text{so ist } 2a^2 = c\,(d + c)$$
$$\text{und } 2b^2 = c\,(c - d).$$

Aus ihnen folgt:

$$1. \quad a = \sqrt{\frac{c\,(c + d)}{2}}.$$

$$2. \quad b = \sqrt{\frac{c\,(c - d)}{2}}.$$

$$3. \quad tg\alpha = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{c + d}{c - d}}$$

$$4. \quad \triangle = {}^1/_2\, ab = {}^1/_4\, c \sqrt{(c + d)\,(c - d)}.$$

Aufgabe 11. Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus den Transversalen (t_a, t_b) die an die Katheten gezogen sind.

Auflösung: Aus dem pythagoräischen Lehrsatze erhält man:

$$t_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2$$

$$\text{und } t_b^2 = \frac{b^2}{4} + a^2$$

und aus beiden Gleichungen durch einige Umformungen:

$$a^2 + b^2 = {}^{12}/_{15}\,(t_a^2 + t_b^2)$$

$$\text{und}\quad b^2 - a^2 = {}^{20}/_{15}\,(t_a^2 - t_b^2)$$

$$\text{daher}\quad a^2 = {}^{16}/_{15}\,t_b^2 - {}^{4}/_{15}\,t_a^2$$

$$\text{und } 1.\quad a = 2\sqrt{\frac{(2\,t_b + t_a)(2\,t_b - t_a)}{15}}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man für b:

$$2.\quad b = 2\sqrt{\frac{(2\,t_a + t_b)(2\,t_a - t_b)}{15}}.$$

$$3.\quad tang\,\alpha = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{(2\,t_b + t_a)\,(2\,t_b - t_a)}{(2\,t_a + t_b)\,(2\,t_a - t_b)}}.$$

$$4.\quad \triangle = {}^1/_2\,ab \quad \text{u. s. w.}$$

Aufgabe 12. Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus dem Radius (ϱ) des eingeschriebenen Kreises und dem Winkel (α).

Auflösung: Denkt man sich den eingeschriebenen Kreis construirt, so ergiebt sich leicht, daß:

$$b = \varrho + \varrho\,.\,cot\,{}^1/_2\,\alpha$$

$$\text{und}\quad a = \varrho + \varrho\,.\,cot\,(45 - {}^1/_2\,\alpha).$$

Aus der ersten Gleichung erhält man, indem man $cot\,{}^1/_2\,\alpha = \dfrac{cos\,{}^1/_2\,\alpha}{sin\,{}^1/_2\,\alpha}$ setzt und §. 39, 32 berücksichtigt:

$$1.\quad b = \frac{\varrho\cdot sin\,(45 + {}^1/_2\,\alpha)\,\sqrt{2}}{sin\,{}^1/_2\,\alpha}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man für a:

$$2.\quad a = \frac{\varrho\;.\;cos\,{}^1/_2\,\alpha\;.\;\sqrt{2}}{sin\,(45 - {}^1/_2\,\alpha)}.$$

Aus diesen Formeln für a und b ergeben sich leicht die Formeln für $tang\,\alpha$, $tang\,\beta$, $\triangle$ und c.

Aufgabe 13. Berechnung eines rechtwinkligen Dreiecks aus dem Radius (ϱ) des eingeschriebenen Kreises und einer Kathete (a).

Auflösung: Denkt man sich den eingeschriebenen Kreis construirt, so ergiebt sich leicht aus der Natur des rechtwinkligen Dreiecks, daß:

$$a + b - c = 2\,\varrho \text{ ist.}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$c - b = a - 2\,\varrho.$$

Da nun nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$$c^2 - b^2 = a^2 \text{ ist,}$$

so erhält man durch Division beider Gleichungen:

$$c + b = \frac{a^2}{a - 2\,\varrho}.$$

$$\text{Also } 1.\quad b = \frac{2\,\varrho\,(a - \varrho)}{(a - 2\,\varrho)}$$

$$\text{und } 2.\quad tang\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a\,(a - 2\,\varrho)}{2\,\varrho\,(a - \varrho)} \quad \text{u. s. w.}$$

B. Berechnung schiefwinkliger Dreiecke.

Aufgabe 14. Berechnung eines Dreiecks aus der Summe zweier Seiten ($a + b = s$) und ihren Gegenwinkeln (α, β).

Auflösung: Nach der Sinusregel ist: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{sin\,\alpha}{sin\,\beta}$.

$$\text{Daher}\quad \frac{a + b}{a} = \frac{sin\,\alpha + sin\,\beta}{sin\,\alpha}$$

$$\text{oder}\quad \frac{s}{a} = \frac{2\,.\,sin\,{}^1/_2\,(\alpha + \beta)\,.\,cos\,{}^1/_2\,(\alpha - \beta)}{sin\,\alpha} \quad (\S.\,39,\,42).$$

$$\text{Demnach ist } 1.\quad a = \frac{s\,.\,sin\,\alpha}{2\,.\,sin\,{}^1/_2\,(\alpha + \beta)\,.\,cos\,{}^1/_2\,(\alpha - \beta)}.$$

Ganz ebenso findet man:

$$2.\quad b = \frac{s\,.\,sin\,\beta}{2\,.\,sin\,{}^1/_2\,(\alpha + \beta)\,.\,cos\,{}^1/_2\,(\alpha - \beta)}.$$

Substituirt man in $\dfrac{a}{c} = \dfrac{sin\,\alpha}{sin\,\gamma}$ für den in (1) gefundenen Werth und für $sin\,\gamma$, $sin\,{}^1/_2\,(\alpha + \beta)$, so erhält man nach einer leichten Umformung:

$$3.\quad c = \frac{s\,.\,cos\,{}^1/_2\,(\alpha + \beta)}{cos\,{}^1/_2\,(\alpha - \beta)}.$$

Substituirt man endlich in der Formel für $\triangle = \dfrac{ab}{2}\,.\,sin\,(\alpha + \beta)$ die in 1. und 2. für a und b gefundenen Werthe, so erhält man:

$$4.\quad \triangle = \frac{s^2\,.\,sin\,\alpha\,.\,sin\,\beta\,.\,cot\,{}^1/_2\,(\alpha + \beta)}{4\,.\,cos\,{}^1/_2\,(\alpha - \beta)^2}.$$

Aufgabe 15. Berechnung eines Dreiecks aus der Differenz zweier Seiten ($a - b = d$) und ihren Gegenwinkeln (α und β).

Auflösung: Durch eine ganz ähnliche Ableitung, wie bei der vorigen Aufgabe, findet man:

$$1.\quad a = \frac{d \,.\, sin\,\alpha}{2 \,.\, cos\,{}^1/_2\,(\alpha + \beta) \,.\, sin\,{}^1/_2\,(\alpha - \beta)}.$$

$$2.\quad b = \frac{d \,.\, sin\,\alpha}{2 \,.\, cos\,{}^1/_2\,(\alpha + \beta) \,.\, sin\,{}^1/_2\,(\alpha - \beta)}.$$

$$3.\quad c = \frac{d \,.\, sin\,{}^1/_2\,(\alpha + \beta)}{sin\,{}^1/_2\,(\alpha - \beta)}.$$

$$4.\quad \triangle = \frac{d^2 \,.\, sin\,\alpha \,.\, sin\,\beta \,.\, tg\,{}^1/_2\,(\alpha + \beta)}{4 \,.\, sin\,{}^1/_2\,(\alpha - \beta)^2}.$$

Aufgabe 16. Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite (a), ihrem Gegenwinkel (α) und der Summe der beiden anderen Seiten ($b + c = s$).

Auflösung: Nach der Sinusregel ist:

$$\frac{b + c}{b} = \frac{sin\,\beta + sin\,\gamma}{sin\,\beta}$$

$$\text{oder } \frac{b + c}{a} = \frac{sin\,\beta + sin\,\gamma}{sin\,\alpha}$$

$$\text{oder } \frac{s}{a} = \frac{2 \,.\, sin\,{}^1/_2\,(\beta + \gamma) \,.\, cos\,{}^1/_2\,(\beta - \gamma)}{2 \,.\, sin\,{}^1/_2\,(\beta + \gamma) \,.\, cos\,{}^1/_2\,(\beta + \gamma)}$$

$$\text{oder } \frac{s}{a} = \frac{cos\,{}^1/_2\,(\beta - \gamma)}{cos\,{}^1/_2\,(\beta + \gamma)}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man:

$$1.\quad cos\,{}^1/_2\,(\beta - \gamma) = \frac{s \,.\, cos\,{}^1/_2\,(\beta + \gamma)}{a} = \frac{s \,.\, sin\,{}^1/_2\,\alpha}{a}.$$

Aus $(\beta + \gamma) = 180 - \alpha$ und aus $(\beta - \gamma)$ der obigen Formel erhält man β und γ.

Die Werthe für b und c findet man durch Anwendung der Sinusregel.

Aufgabe 17. Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite (a), ihrem Gegenwinkel (α) und der Differenz der beiden anderen Seiten ($b - c = d$).

Auflösung: Durch eine ähnliche Herleitung, wie bei der vorigen Aufgabe, findet man:

$$sin\,{}^1/_2\,(\beta - \gamma) = \frac{d \,.\, cos\,{}^1/_2\,\alpha}{a}$$

u. s. w.

Aufgabe 18. Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite (a), ihrem anliegenden Winkel (β) und der Summe der beiden anderen Seiten ($b + c = s$).

Auflösung: Nach Aufgabe 16 ist:

$$\frac{s}{a} = \frac{cos\,{}^1/_2\,(\beta - \gamma)}{cos\,{}^1/_2\,(\beta + \gamma)}.$$

$$\text{Daher } \frac{s + a}{s - a} = \frac{cos\,{}^1/_2\,(\beta - \gamma) + cos\,{}^1/_2\,(\beta + \gamma)}{cos\,{}^1/_2\,(\beta - \gamma) - cos\,{}^1/_2\,(\beta + \gamma)}$$

$$= \frac{2 \,.\, cos\,{}^1/_2\,\beta \,.\, cos\,{}^1/_2\,\gamma}{2 \,.\, sin\,{}^1/_2\,\beta \,.\, sin\,{}^1/_2\,\gamma} \quad (\text{§. 39, 40 und 41})$$

$$= cot\,{}^1/_2\,\beta \,.\, cot\,{}^1/_2\,\gamma = \frac{cot\,{}^1/_2\,\beta}{tang\,{}^1/_2\,\gamma}.$$

Demnach ist 1. $tang\,{}^1/_2\,\gamma = \frac{s - a}{s + a} \,.\, cot\,{}^1/_2\,\beta$ u. s. w.

Aufgabe 19. Berechnung eines Dreiecks aus einer Seite (a) dem ihr anliegenden Winkel (β) und der Differenz der beiden anderen Seiten ($b - c = d$).

Auflösung: Durch eine ähnliche Ableitung, wie in der vorigen Aufgabe erhält man:

$$tang\,{}^1/_2\,\gamma = \frac{a - d}{a + d} \,.\, tang\,{}^1/_2\,\beta.$$

Hilfsaufgabe 20. Die Sinussumme der drei Winkel eines Dreiecks in ein Produkt aus den Cosinus der halben Winkel zu verwandeln.

Auflösung: Verwandelt man in $(sin\,\alpha + sin\,\beta + sin\,\gamma)$ die beiden ersten Glieder $(sin\,\alpha + sin\,\beta)$ in $2 \,.\, sin\,{}^1/_2\,(\alpha + \beta)\,cos\,{}^1/_2\,(\alpha - \beta)$ und $sin\,\gamma$ in $sin\,(\alpha + \beta)$ und diesen Ausdruck wiederum in $2 \,.\, sin\,{}^1/_2\,(\alpha + \beta) \,.\, cos\,{}^1/_2\,(\alpha + \beta)$, so erhält man mit Anwendung von §. 39, 38:

$$sin\,\alpha + sin\,\beta + sin\,\gamma = 4 \,.\, cos\,{}^1/_2\,\alpha \,.\, cos\,{}^1/_2\,\beta \,.\, cos\,{}^1/_2\,\gamma.$$

Hilfsaufgabe 21. Die Differenz zwischen der Summe zweier Sinus und dem Sinus des dritten Winkels in ein Produkt aus dem Cosinus des einen halben Winkels und den Sinussen der beiden anderen Winkel zu verwandeln.

Auflösung: Verfährt man, wie bei der vorigen Aufgabe, so erhält man:

$$sin\,\alpha + sin\,\beta - sin\,\gamma = 4 \,.\, sin\,{}^1/_2\,\alpha \,.\, sin\,{}^1/_2\,\beta \,.\, cos\,{}^1/_2\,\gamma.$$

Bemerkung. Auf ähnliche Weise würde sich auch die Richtigkeit folgender beiden Gleichungen erweisen:

1. $sin\,2\alpha + sin\,2\beta + sin\,2\gamma = 4 \,.\, sin\,\alpha \,.\, sin\,\beta \,.\, sin\,\gamma.$
2. $tang\,\alpha + tang\,\beta + tang\,\gamma = tang\,\alpha \,.\, tang\,\beta \,.\, tang\,\gamma.$

Aufgabe 22. Berechnung eines Dreiecks aus den Winkeln und der Summe der drei Seiten ($a + b + c = s$).

Auflösung: Da nach der Sinusregel:

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

so ist $$a = \frac{s \,.\, \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{2 \,.\, \sin {}^1/_2\alpha \,.\, \cos {}^1/_2\alpha \,.\, s}{4 \,.\, \cos{}^1/_2\alpha \,.\, \cos{}^1/_2\beta \,.\, \cos{}^1/_2\gamma}.$$

Daher 1. $$a = \frac{s \,.\, \sin {}^1/_2\alpha}{2 \,.\, \cos {}^1/_2\beta \,.\, \cos {}^1/_2\gamma}.$$

Auf dieselbe Weise findet man:

2. $$b = \frac{s \,.\, \sin {}^1/_2\beta}{2 \,.\, \cos {}^1/_2\alpha \,.\, \cos {}^1/_2\gamma}.$$

3. $$c = \frac{s \,.\, \sin {}^1/_2\gamma}{2 \,.\, \cos {}^1/_2\alpha \,.\, \cos {}^1/_2\beta}.$$

Da $\triangle = {}^1/_2\, ab \,.\, \sin\gamma$, so erhält man aus 1. und 2. für den Flächeninhalt des Dreiecks folgende höchst bequeme Formel:

4. $$\triangle = {}^1/_4 \,.\, s^2 \,.\, \operatorname{tang} {}^1/_2\alpha \,.\, \operatorname{tang} {}^1/_2\beta \,.\, \operatorname{tang} {}^1/_2\gamma.$$

Aufgabe 23. Berechnung eines Dreiecks aus der Differenz zwischen der Summe zweier Seiten und der dritten ($a + b - c = d$) und den Winkeln.

Auflösung: Da nach der Sinusregel:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma}{\sin\gamma}$$

so ist $$c = \frac{d \,.\, \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma} = \frac{2\, d \,.\, \sin {}^1/_2\gamma \,.\, \cos {}^1/_2\gamma}{4 \,.\, \sin{}^1/_2\alpha \,.\, \sin{}^1/_2\beta \,.\, \cos{}^1/_2\gamma}.$$

Daher 1. $$c = \frac{d \,.\, \sin {}^1/_2\gamma}{2 \,.\, \sin {}^1/_2\alpha \,.\, \sin {}^1/_2\beta}.$$

Auf dieselbe Weise findet man:

2. $$b = \frac{d \,.\, \cos {}^1/_2\beta}{2 \,.\, \cos {}^1/_2\gamma \,.\, \sin {}^1/_2\alpha}.$$

3. $$a = \frac{d \,.\, \cos {}^1/_2\alpha}{2 \,.\, \cos {}^1/_2\gamma \,.\, \sin {}^1/_2\beta}.$$

4. $$\triangle = {}^1/_4\, d^2 \,.\, \operatorname{tang} {}^1/_2\gamma \,.\, \cot {}^1/_2\alpha \,.\, \cot {}^1/_2\beta.$$

Aufgabe 24. Berechnung des Radius (r) des umschriebenen Kreises aus dem Radius (ϱ) des eingeschriebenen Kreises und den drei Winkeln des Dreiecks.

Auflösung: Construirt man das Dreieck mit dem Radius des eingeschriebenen Kreises und den drei Halbirungslinien der Winkel, so ergiebt sich leicht, daß $a = \varrho\,(\operatorname{cotg} {}^1/_2\beta + \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma)$.

Da nun $a = 2r \,.\, \sin\alpha$

so ist $2r \,.\, \sin\alpha = \varrho\,(\operatorname{cotg} {}^1/_2\beta + \operatorname{cotg} {}^1/_2\gamma)$

oder $$4r \,.\, \sin {}^1/_2\alpha \,.\, \cos {}^1/_2\alpha = \varrho\left(\frac{\cos {}^1/_2\beta}{\sin {}^1/_2\gamma} + \frac{\cos {}^1/_2\gamma}{\sin {}^1/_2\gamma}\right)$$

$$= \varrho\,\frac{\cos {}^1/_2\beta \,.\, \sin {}^1/_2\gamma + \cos {}^1/_2\gamma \,.\, \sin {}^1/_2\beta}{\sin {}^1/_2\beta \,.\, \sin {}^1/_2\gamma}$$

$$= \varrho\,\frac{\sin {}^1/_2\,(\beta+\gamma)}{\sin{}^1/_2\beta \,.\, \sin{}^1/_2\gamma}$$

$$r = \frac{\varrho}{4 \,.\, \sin {}^1/_2\alpha \,.\, \sin {}^1/_2\beta \,.\, \sin {}^1/_1\gamma}.$$

Aufgabe 25. Berechnung eines Dreiecks aus dem Radius (ϱ) des eingeschriebenen Kreises und den drei Winkeln.

Auflösung: Da $a = 2r \,.\, \sin\alpha$

und nach der vorigen Aufgabe:

$$r = \frac{\varrho}{4 \,.\, \sin {}^1/_2\alpha \,.\, \sin {}^1/_2\beta \,.\, \sin {}^1/_2\gamma}$$ ist,

so ist 1. $$a = \frac{\varrho \,.\, \sin\alpha}{2 \,.\, \sin {}^1/_2\alpha \,.\, \sin {}^1/_2\beta \,.\, \sin {}^1/_2\gamma} = \frac{\varrho \,.\, \cos {}^1/_2\alpha}{\sin {}^1/_2\beta \,.\, \sin {}^1/_2\gamma}.$$

Auf dieselbe Weise findet man:

2. $$b = \frac{\varrho \,.\, \cos {}^1/_2\beta}{\sin {}^1/_2\alpha \,.\, \sin {}^1/_2\gamma}.$$

3. $$c = \frac{\varrho \,.\, \cos {}^1/_2\gamma}{\sin {}^1/_2\beta \,.\, \sin {}^1/_2\alpha}.$$

4. $$\triangle = \varrho^2 \,.\, \cot {}^1/_2\alpha \,.\, \cot {}^1/_2\beta \,.\, \cot {}^1/_2\gamma.$$

Aufgabe 26. Ein Dreieck aus seinen drei Höhen zu berechnen.

Auflösung: Bezeichnet man die den drei Seiten (a, b, c) zugehörigen Höhen mit α, β, γ, so ist:

$$a \,.\, \alpha = b \,.\, \beta = c \,.\, \gamma = 2\triangle$$

daher 1. $$\frac{a}{c} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

und 2. $$\frac{b}{c} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Da nun $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \,.\, \cos A$ •

so ist, wenn man auf beiden Seiten durch c^2 dividirt:

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} + 1 - \frac{2\,b}{c} \,.\, \cos A.$$

Substituirt man für $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ die in der ersten und zweiten Gleichung gefundenen Werthe, so ist:

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} + 1 - \frac{2\,\gamma}{\beta} \,.\, \cos A.$$

Aus ihr findet man durch eine leichte Umformung:

1. $$\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\,\beta\,\gamma} - \frac{\beta\gamma}{2\,\alpha^2}.$$

Zieht man beide Seiten dieser Gleichung von 1 ab oder addirt sie zu 1 hinzu, so erhält man:

2. $$\sin {}^1\!/_2\, A = {}^1\!/_2 \,.\, \sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\left[1 - \frac{\alpha^2 (\beta - \gamma)^2}{\beta^2\,\gamma^2}\right]}$$

3. $$\cos {}^1\!/_2\, A = {}^1\!/_2\, (\beta + \gamma) \sqrt{\frac{1}{\beta\gamma}\left[1 - \frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^2 (\beta + \gamma)^2}\right]}.$$

Beide Formeln 2. und 3. lassen sich in logarithmische Formeln verwandeln, wenn man in 1. $\frac{\alpha\,(\beta - \gamma)}{\beta\,\gamma} = \sin\varphi$

und ebenso in 2. $\frac{\beta\,\gamma}{\alpha\,(\beta + \gamma)} = \sin\psi$ setzt.

Dadurch erhält man:

$$\sin {}^1\!/_2\, A = \frac{\cos\varphi}{2\,\alpha} \,.\, \sqrt{\beta\,\gamma}$$

und $$\cos {}^1\!/_2\, A = \frac{(\beta + \gamma) \,.\, \cos\psi}{2\sqrt{\beta\,\gamma}}.$$